Approximation mit relativer Gütegarantie – Überblick und einführende Beispiele

Marvin Schiller

14. Oktober 2007

1. Einführung

In diesem Essay geben wir einen Überblick über eine Auswahl von algorithmischen Problemen, die zwar $\mathcal{NP}$-schwer sind, für die sich aber mithilfe von Approximationsalgorithmen in polynomieller Laufzeit Lösungen bestimmen lassen, die von einer optimalen Lösung nur im Rahmen einer beweisbaren Gütegarantie abweichen. Wir konzentrieren uns auf Algorithmen mit einer relativen Gütegarantie, d.h., der Wert einer durch den Algorithmus gefundenen Lösung weicht beweisbar nicht mehr als um einen gegebenen Faktor von der optimalen Lösung ab. Wir weisen im Rahmen des allgemeinen Handlungsreisendenproblems aber auch darauf hin, daß es $\mathcal{NP}$-schwere Probleme gibt, von denen anzunehmen ist, daß sie sich nicht mit relativer Gütegarantie annähern lassen (es sei denn, $\mathcal{P}$=$\mathcal{NP}$). Wir beginnen in Abschnitt mit dem Mehrfachschnittproblem (engl. multiway cut problem), und stellen einen Approximatsionsalgorithmus aus [2] vor. Mithilfe einer Zeugenmenge wird verdeutlicht, daß sich durch die Analyse dieses Algorithmus keine bessere relative Güte für den Algorithmus nachweisen läßt. Weiterhin stellen wir in Abschnitt den Algorithmus von Christofides vor [1], ein Approximationsalgorithmus für das metrische Handlungsreisendenproblem (engl. traveling salesman problem, TSP). Zuletzt behandeln wir ein Unmöglichkeitsergebnis zur Approximierbarkeit des allgemeinen Handlungsreisendenproblems.

2. Approximation mit relativer Gütegarantie am Beispiel des Schnittproblems

Im folgenden führen wir den für diesen Essay zentralen Begriff der relativen Gütegarantie ein. Sei Π ein Optimisierungsproblem. Wir bezeichnen die Menge aller Instanzen des Optimierungsproblems mit $\mathcal{D}$. Für eine gegebene Probleminstanz $I \in \mathcal{D}$ bezeichnet $OPT(I)$ den Wert der optimalen Lösung, b.z.w. für einen gegebenen Algorithmus A bezeichnet $A(I)$ den Wert der Lösung, die durch A berechnet wird.

Definition 1 *Wir definieren die relative Güte von A auf Eingabe I als*

$$\rho_A(I) = max\left\{\frac{A(I)}{OPT(I)}, \frac{OPT(I)}{A(I)}\right\}$$

Diese Definition erzwingt sowohl bei einem Minimisierungs- wie auch einem Maximisierungsproblem einen Wert größer oder gleich eins. Im folgenden betrachten wir ungerichtete Graphen $G = (V, E)$ mit Kantengewichten, die durch eine Zuordnung $w : E \rightarrow R^+$ gegeben sind.

Definition 2 *Ein Schnitt (cut) auf einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Partition der Knotenmenge V in zwei disjunkte Mengen V' und $V - V'$. Daraus ergibt sich eine durch den Schnitt gegebene Menge aller Kanten mit jeweils einem Endpunkt in jeder der Mengen V' und $V - V'$. Das Gewicht $w(S)$ eines Schnittes S sei die Summe der Kantengewichte dieser Kanten.*

Definition 3 *Ein s-t-Schnitt ist ein Schnitt, der zwei Knoten s und t aus V in zwei unterschiedliche Partitionen trennt.*

Definition 4 *Gegeben $S = \{s_1, s_2, ..., s_k\} \subseteq V$. Ein Mehrfachschnitt definiert eine Kantenmenge, bei deren Entfernen alle Knoten von S (die sog. "Terminale") voneinander getrennt werden.*

Definition 5 *Das* Mehrfachschnittproblem *besteht darin, einen Mehrfachschnitt mit minimaler Summe der Kantengewichte zu finden.*

Ein Approximationsalgorithmus für das Mehrfachschnittproblem

Der Algorithmus [2], vorgestellt in [4], verwendet das Konzept des *isolierenden Schnitts*. Daraus ergibt sich direkt ein Approximationsalgorithmus, der – ganz im Sinne von *divide & conquer* – das Problem des Mehrfachschnitts auf die Berechnung mehrerer isolierender Schnitte reduziert.

Algorithmus 1
(i) Für alle $i = 1, \ldots, k$ finde einen minimalen isolierenden Schnitt für s_i, nenne ihn C_i.
(ii) Entferne den schwersten dieser Schnitte und gebe die Vereinigung der übrigen Schnitte aus, nenne das Ergebnis C.

Der Algorithmus erzielt eine relative Approximationsgüte von $2 - \frac{2}{k}$, d.h. $w(C) \leq (2 - \frac{2}{k}) \cdot w(OPT)$.

Beweis 1 *Wir setzten die vom Algorithmus gefundene Lösung C in Beziehung zu einer optimalen Lösung S^*, ohne diese im Detail zu kennen. Nichtsdestotrotz können können wir über S^* aussagen, daß das Entfernen der durch S^* definierten Kanten k Zusammenhangskomponenten mit jeweils einem Terminal hinterläßt (die definierende Eigenschaft des Mehrfachschnitts). Wir betrachten nun Teilmengen S_i der Kanten von S^*, die jeweils eine solche Zusammenhangskomponente (inklusive einem Terminal s_i) vom Rest des Graphen trennen (d.h., wir betrachten einen isolierenden Schnitt für s_i). Jede durch S^* gegebene Kante verbindet jeweils zwei solche Zusammenhangskomponenten miteinander[1], d.h. jede Kante von S^* ist in zwei verschiedenen isolierenden Schnitten*

[1] Ansonsten kann S^* kein minimaler Mehrfachschnitt sein.

S_i, S_j. Das heißt, das Gewicht aller isolierenden Schnitte S_i ist gegeben durch: $\sum_{i=1}^{k} w(S_i) = 2w(S^*)$. Nun ist für jede Zusammenhangskomponente mit Terminal s_i der durch den Algorithmus erzeugten isolierende Schnitt C_i minimal, d.h. $w(C_i) \leq w(A_i)$. Weiterhin gilt, daß das Gewicht von C der Summe der Gewichte der C_i entspricht unter Abzug des Gewichts des schwersten Cuts. Dies ist mindestens $\frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} w(C_i)$ (per Durchschnittsbildung über die Gewichte der C_i). Folglich gilt:

$$w(C) \leq (1 - \frac{1}{k}) \sum_{i=1}^{k} w(C_i) \leq (1 - \frac{1}{k}) \sum_{i=1}^{k} w(S_i) = 2 \cdot (1 - \frac{1}{k}) \cdot w(S^*)$$

Ein Zeugenmenge für die relative Approximationsgüte Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, daß der Algorithmus eine relative Güte von $2 \cdot (1 - \frac{1}{k})$ garantiert. Es ist aber nicht *a priori* klar, ob es nicht eine bessere Gütegarantie geben kann, die sich mit einer besseren Analyse des Algorithmus zeigen ließe. Diese Möglichkeit kann durch das Finden einer unendlichen Menge von Beispielinstanzen ausgeräumt werden, die das Gegenteil bezeugt (d.h., eine Menge von Beispielen, die die bekannten Schranken der Approximationsgüte tatsächlich annehmen).

Eine solche Zeugenmenge für Algorithmus 1 stellt Vazirani vor [4]. Jedes Element der Zeugenmenge ist ein Graph mit $2k$ Knoten, bestehend aus einem k-Kreis mit Kantengewichten von jeweils 1, und k unterschiedlichen Terminalen verbunden mit jeweils einem der Kreisknoten mit Kantengewichten $2 - \epsilon$, wobei ϵ eine kleine Zahl sei, $\epsilon > 0$. Ein Beispiel für einen solchen Graphen mit $k = 4$ ist in Abbildung 1 dargestellt. Algorithmus 1 liefert nun im ersten Schritt für jedes Terminal s_i den isolierenden Schnitt mit dem geringsten Gewicht. In diesem Fall ist dies der Schnitt, der durch das Entfernen der Kante zwischen s_i und dem dazugehörigen Kreisknoten entsteht. Für alle k Terminale ergibt dies ein Gewicht von $k \cdot (2 - \epsilon)$, b.z.w. $(k - 1) \cdot (2 - \epsilon)$ nach dem Entfernen eines der Cuts durch den Algorithmus. Der optimale Cut hat allerdings ein Gewicht von nur k (wenn alle Kanten zwischen den Kreisknoten entfernt werden). Dies zeigt also, daß sich für den Algorithmus keinen besseren Approximationsfaktor als $2 - \epsilon$ gibt.

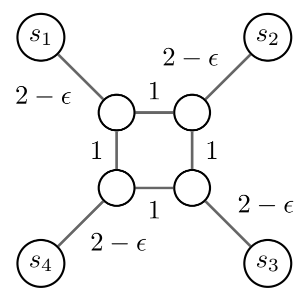

Abbildung 1: Ein Zeuge für die Approximationsgüte von Algorithmus 1.

3. Das Handlungsreisendenproblem

Wir erörtern nun einen klassischen Algorithmus [1] zur Approximation des metrischen Handlungsreisendenproblems (engl. *(metric) Traveling Salesman Problem*), und zeigen einen Unterschied in der Approximierbarkeit zwischen der allgemeinen und der metrischen Variante auf.

Definition 6 *Das Handlungsreisendenproblem besteht aus einem vollständigen Graphen $K_n = (V, E)$ mit n Knoten, versehen mit Kantengewichten (gegeben durch eine Funktion $w : E \to \mathbb{N}$). Eine Lösung S ist ein Hamiltonkreis*[2] *mit identischem Start- und Endknoten. Bei einer optimalen Lösung ist die Summe der Kantengewichte minimal.*

Definition 7 *Bei einem metrischen TSP gilt für die Kantengewichte die Dreiecksungleichung: $\forall x, y, z \in V : w(x, y) \leq w(x, z) + w(z, y)$.*

Approximation des metrischen TSP Das metrische TSP kann mit dem Algorithmus von Christofides [1] mit relativer Güte $\frac{3}{2} - \frac{1}{n}$ approximiert werden.

Algorithmus 2 *(i) Gegeben $I = \langle K_n, w \rangle$, berechne minimalen Spannbaum*[3] *T_{CH}.*

(ii) Sei $S := \{v \in T_{CH} | deg_{T_{CH}}(v) \text{ ist ungerade}\}$.

(iii) Bilde den durch S induzierten Teilgraph von K_n und berechne darauf ein leichtestes Matching[4] *M_{CH}.*

(iv) berechne einen Euler-Kreis $E = (u_1, u_2, ...)$ auf $T_{CH} \uplus M_{CH}$ [$T_{CH} \uplus M_{CH}$ kann Multi-Graph sein; alle Knoten haben geraden Grad]

(v) entferne Wiederholungen von Knoten in E, und gebe den Kreis aus.

Der Beweis der relativen Gütegarantie (siehe [5]) setzt sich aus zwei Teilen zusammen, der Abschätzung der Kosten des minimalen Spannbaums T_{CH} und der Kosten des leichtesten Matchings M_{CH} bezüglich der optimalen Lösung $OPT(I)$. Bei der Abschätzung der Kosten von M_{CH} ist die Dreiecksungleichung von Bedeutung, genauer: Sei R^* die optimale Lösung des TSP. Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt für einen Kreis H, der nur eine Teilmenge der Knoten $S \subseteq V$ besucht (allerdings in der ursprünglichen Reihenfolge von R^*), daß $w(H) \leq w(R^*)$ (der Kreis H ist an R^* "angelehnt"). Nun läßt sich zeigen, daß $w(M_{CH}) \leq \frac{1}{2} w(H)$ ist, so daß letztendlich auch $w(M_{CH}) \leq \frac{1}{2} w(R^*)$. Zusammen mit $w(T_{CH}) \leq (1 - \frac{1}{n}) \cdot w(R^*)$ ergibt sich die relative Güte von $\frac{3}{2} - \frac{1}{n}$.

Ein Unmöglichkeitsergebnis für das allgemeine TSP Der eben geschilderte Beweis beruht auf der Dreiecksungleichung. Falls die Dreiecksungleichung nicht gefordert wird (d.h., wir betrachten das allgemeine TSP), so lässt sich zeigen, daß es keinen Approximationsalgorithmus für das allgemeine TSP mit fester relativer Gütegarantie geben kann, es sei denn, $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$. Der Beweis reduziert das bekanntermassen $\mathcal{NP}$-vollständigen Entscheidungsproblem Hamilton-Kreis auf das Problem, das allgemeine TSP im Rahmen einer festen relativen Güte r zu lösen. Dabei wird die Technik des "Scaling" oder auch "Gap amplification" verwendet: Wir nehmen an, daß wir das allgemeine TSP mit gegebener fester

---

[2] Ein Hamiltonkreis ist ein Kreis, der alle Knoten eines gegebenen Graphen beinhaltet.

[3] In einem zusammenhängenden, ungerichteten Graph ist ein minimaler Spannbaum ein Teilgraph von G, der (i) ein Baum ist, (ii) alle Knoten von G verbindet, und (iii) minimales Kantengewicht hat. Dieser ist mit Prims Algorithmus in $O(|E| + |V| \cdot log|V|)$ berechenbar.

[4] Dies ist möglich in $O(n^{2.5}(\log n)^4)$ (vgl. [3]).

relativer Güte r lösen lönnen. Wir transformieren das Hamiltonkreis-Problem durch Anpassung der Gewichtung an die feste Gütegarantie r derart, daß auch trotz der erwarteten Abweichungen im Rahmen von r durch A eine eindeutige Antwort auf das Hamiltonkreis-Problem gefunden wird.

Beweis 2 *Nehme an, es gibt einen polynomiellen Approximationsalgorithmus A für TSP mit relativer Güte r. Dann benutze folgenden Algorithmus, um HAMILTON (in $\mathcal{NP}$) mithilfe von A (in $\mathcal{P}$) zu entscheiden (d.h., wir betrachten die Polynomialzeit-Reduktion von HAMILTON auf das Lösen des allgemeinen TSP mit gegebener relativer Güte r):*

Algorithmus 3 *(i) berechne aus der Probleminstanz von HAMILTON eine Probleminstanz I_G für TSP (Details folgen!)*

(ii) verwende A um eine kürzeste Rundreise zu approximieren

(iii) falls $A(I_G) > r \cdot |V|$ gebe aus: "G hat keinen Hamilton-Kreis" ansonsten gebe aus: "G hat Hamilton-Kreis".

Dabei wird I_G wie folgt konstruiert. Sei $n = |V|$. Dann sei $I_G = \langle K_n, w\rangle$ (K_n ist vollständiger Graph) mit $w(u,v) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } \{u,v\} \in E \\ (r-1)\cdot n + 2 & \textit{falls } \{u,v\} \notin E \end{cases}$

I_G ist in Polynomialzeit aus G berechenbar und hat zwei Arten von Kanten, "lange Kanten" (Gewicht $(r-1)\cdot n+2$) und "kurze Kanten" (Gewicht 1). Falls der ursprüngliche Graph G einen Hamilton-Kreis hat, so hat die kürzeste Rundreise in I_G die Länge n. Falls G keinen Hamilton-Kreis hat, so gibt es in jeder Rundreise in I_G mindestens eine lange Kante der Länge $(r-1)\cdot n+2$. In der Konsequenz nimmt das TSP I_G nur Lösungen an mit Länge kleiner als $n+1$ oder grösser als $r \cdot n$ (d.h., wir haben einen "gap", ein Loch). Algorithmus 3 entscheidet also das Hamilton-Problem.

Zusammenfassung

Klassische Approximationsalgorithmen für typische $\mathcal{NP}$-schwere Probleme wurden vorgestellt. Neben einem Überblick sowie Beispielen zu den relevanten Beweistechniken wurde anhand des TSP aber auch auf eine Grenze für die Approximation mit relativer Gütegarantie hingewiesen.

Literatur

[1] Nikos Christofides. Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem. Technical Report 388, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, 1976.

[2] E. Dahlhaus, D.S. Johnson, C.H. Papadimitriou, P.D. Seymour, and M. Yannakakis. The complexity of multiterminal cuts. *SIAM Journal on Computing*, 23:864–894, 1994.

[3] P. M. Vaidya. Geometry helps in matching. *SIAM J. Comput.*, 18(6):1201–1225, 1989.

[4] Vijay V. Vazirani. *Approximation Algorithms*. Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 2001.

[5] Rolf Wanka. *Approximationsalgorithmen : eine Einführung*. Teubner, Wiesbaden, 2006. 1. Aufl.