
Grundlegende Algorithmen

Es sind insgesamt **40** Punkte zu erreichen.
Bitte schreiben Sie nicht mit roter oder grüner Farbe und nicht mit Bleistift.
Begründen Sie alle Ihre Schritte.
Die Bearbeitungszeit beträgt **90** Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

- (a) $17n^3 = o(n^3 \log n)$
- (b) $17n^3 = O(n^3 \sin^2(\frac{\pi}{2}n))$
- (c) $2^n = \Omega(3^n)$
- (d) $\sum_{j=0}^n j2^j = \Theta(n2^n)$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

- (a) Geben Sie eine RAM an, die die Zweierpotenzen natürlicher Zahlen, d.h. die Funktion $f(x) = 2^x$ für $x \in \mathbb{N}$ berechnet. Die Startkonfiguration sei $\langle R0 \rangle = x$, $\langle Ri \rangle = 0$ für $i > 0$ und $\langle BR \rangle = 0$. Nach Ablauf der Berechnung muss $\langle R0 \rangle = 2^x$ gelten.

Beachte: Die Punktzahl für eine korrekte RAM errechnet sich durch $\max\{0, 14 - N\}$, wobei N die Anzahl der Befehle (ohne STOP) ist. Für eine RAM mit 14 oder mehr Befehlen gibt es somit keine Punkte.

- (b) Bestimmen Sie die Anzahl der Schritte der RAM in Abhängigkeit vom Wert der Eingabe und geben Sie für die Anzahl eine möglichst gute Schranke in der O -Notation an, wenn die Größe der Eingabe nicht als Wert sondern als Länge der Binärdarstellung natürlicher Zahlen definiert ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

- (a) Repräsentiert die Folge $(9, 8, 7, 6, 3, 4, 2, 5, 0, 2, 1, 2)$ einen Heap?
- (b) Beschreiben Sie einen effizienten Algorithmus, der ein neues Element in einen Heap mit n Elementen einfügt und einen Heap mit $n + 1$ Elementen produziert.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Beschreiben Sie einen rekursiven Sortieralgorithmus auf Basis des Mischens von drei vorsortierten Folgen. Stellen Sie für die Anzahl der benötigten Vergleiche eine Rekursionsgleichung auf und geben Sie eine möglichst gute Abschätzung an.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Angenommen wir kennen einen Algorithmus A , der mit linearer Anzahl von Vergleichen den Median von n Elementen bestimmt. Zeigen Sie, dass es dann einen einfachen Algorithmus (nicht der BFPRT-Algorithmus) gibt, der mit Hilfe von A ein Element von beliebigem Rang unter n Elementen bestimmt und dabei mit einer linearen Anzahl von Vergleichen auskommt.