Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger
Dr. Stefanie Gerke
Alexander Offtermatt-Souza

Wintersemester 2002
Übungsblatt 04

Randomisierte Algorithmen

Abgabetermin. Montag, den 18.11.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Lastverteilung (10 Punkte)

Angenommen wir haben n Jobs die wir auf n Rechner in einem Rechnernetz verteilen wollen. Wir entscheiden uns für folgende Strategie: die n Jobs werden den n Rechnern unabhängig und gleichverteilt zugewiesen. Wir untersuchen die Zufallsvariablen

$$X_i = \text{Anzahl der Jobs im } i\text{-ten Rechner}$$

für $i = 1, \ldots, n$ und $X = \max\{X_i : i = 1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie mit Hilfe der X_i, die Aussage

$$\mathbb{P}\left[X \geq 2\log n\right] \leq \frac{1}{n}.$$

Hinweis. Es gibt noch eine Version der Chernoff-Schranke. Seien Y_i unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit Erfolgswahrscheinlichkeit p_i, sowie $Y = \sum_i Y_i$ und $\mu = \mathbb{E}[Y]$, dann gilt $\mathbb{P}\left[Y \geq t\right] \leq 2^{-t}$ falls $t \geq 2e\mu$.

Aufgabe 2 Permutation Routing (15 Punkte)

In der Vorlesung wurde folgendes Lemma gebraucht und Teil (b) auch bewiesen. Ihre Aufgabe ist es, Teil (a) zu beweisen.

Lemma 1 *Betrachte Phase 1 und ein $v \in V$. Sei $(e_1, \ldots, e_k)$ der Pfad von v nach $r(v)$. Sei $S = \{x \neq v : \text{Pfad von } x \text{ benutzt mindestens eine der Kanten } e_1, \ldots, e_k\}$. Dann gilt:*

(a) Paket v kommt spätestens nach $k + |S|$ Runden an.

(b) $\mathbb{P}\left[|S| \geq 6n\right] \leq 2^{-6n}$.

Hinweis. Ordnen Sie jede Verzögerung von v genau einem Paket von S zu.

Aufgabe 3 Bit Fixing Algorithmus (15 Punkte)

Betrachten Sie folgende Variante des *Bit-Fixing* Algorithmus, für das *Permutation Routing Problem.* Jedes Paket gibt den Bits der Startknotennummer eine zufällige Reihenfolge und korrigiert die Bits dann in dieser Reihenfolge.

Nehmen wir an, es gibt 2^n Knoten. Zeigen Sie, daß es eine Permutation gibt, bei der dieser Algorithmus mit hoher Wahrscheinlichkeit $2^{\Omega(n)}$ Schritte benötigt, bis das letzte Paket seinen Zielknoten erreicht.

Hinweis. Konstruieren Sie eine Permutation, bei der die erwartete Anzahl der Pakete, die über die Kante

$$\left(0 \underbrace{0, \ldots,}_{(n-1)} \right) \to \left(1 \underbrace{0, \ldots,}_{(n-1)} \right)$$

laufen exponentiell ansteigt.
Betrachten Sie einen Startknoten, bei dem genau $r \leq (n-1)/2$ Bits 1 sind und bei dem an der ersten Bitposition eine 0 steht. Dieser Knoten soll ein Paket an einen Zielknoten schicken, der in der ersten Bitposition eine 1 hat und der noch r weitere Eins-Bits enthält, die aber alle verschieden von den r Eins-Bits im Startknoten sind.

Übungsleitung

Alexander Offtermatt-Souza
Raum: MI 03.09.037 – Telefon: 289-17742 – eMail: offterma@in.tum.de