Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger
Dr. Stefanie Gerke
Alexander Offtermatt-Souza

Wintersemester 2002
Übungsblatt 11

Randomisierte Algorithmen

Abgabetermin. Montag, den 27.1.2003 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Tutte's Theorem (15 Punkte)

Wir wollen Edmond's Theorem auf allgemeine Graphen erweitern. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichter Graph mit $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Wir definieren die $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$ mit:

$$a_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \{i,j\} \in E \text{ und } i < j \\ -x_{ji} & \{i,j\} \in E \text{ und } i > j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es sei $Q(x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{n-1,n}) := \det(A)$. Zeigen Sie, daß G genau dann ein perfektes Matching besitzt, wenn $Q \not\equiv 0$.

Hinweis. Fassen Sie die Matrix A als Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphen auf und überlegen Sie sich wie die Zyklen einer Knotenpermutation in diesem Graph zu interpretieren sind. Hier zur Erinnerung die Definition des Vorzeichens einer Permutation $\pi \in S_n$.

$$\operatorname{sgn}(\pi) = \Pi_{1 \le i < j \le n} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i}$$

Es gilt: $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^s$, wobei s gleich der Anzahl negativer Faktoren $\pi(j) - \pi(i)$ in obigem Produkt ist. Weiterhin ist nützlich: $1 = \operatorname{sgn}(\mathrm{id}) = \operatorname{sgn}(\pi \circ \pi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\pi^{-1})$.

Aufgabe 2 Gewichtetes perfektes Matching (10 Punkte)

Sei $G = (V, E, w)$ ein ungerichteter gewichteter Graph mit $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, ganzzahligen Kantengewichten $w(e) \geq 1$ für alle $e \in E$ und sei $A = (a_{ij})$ mit:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2^{w(\{i,j\})} & \{i,j\} \in E \text{ und } i < j \\ -2^{w(\{j,i\})} & \{i,j\} \in E \text{ und } i > j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie folgende Aussage: Ist das perfekte Matching mit minimalem Gewicht *eindeutig*, so ist dessen Gewicht gleich dem Exponent der größten $2er$ Potenz, die $\det(A)$ teilt.

Aufgabe 3 Einheitskosten vs. logarithmische Kosten (15 Punkte)

Beschreiben Sie einen Algorithmus, der zu einer gegebenen natürlichen Zahl $z \in \mathbb{N}$, $\lfloor\sqrt{z}\rfloor$ berechnet.

Der Algorithmus soll lineare Laufzeit im Einheitskostenmaß haben (d.h. Sie zählen die Anzahl arithmetscher Operationen). *Achtung.* Die Eingabelänge ist $\log z$.

Was ergibt sich für die Laufzeit im logarithmischen Kostenmaß (d.h. Sie zählen die Anzahl Bitoperationen)? Nehmen Sie dabei an, daß die Kosten für eine Multiplikation k^2 sind, wenn die beiden zu multiplizierenden Zahlen k Bits lang sind.

Semestralklausur

Wenn Sie an der Semestralklausur teilnehmen möchten melden Sie sich bitte bis zum 23.1.2003 per eMail an Alexander Offtermatt-Souza `offterma@in.tum.de` mit Name, Matrikelnummer und eMailadresse an.

Übungsleitung

Alexander Offtermatt-Souza
Raum: MI 03.09.037 – Telefon: 289-17742 – eMail: offterma@in.tum.de