

---

## Algorithmische Algebra II

---

Abgabe: 16. Juni, in der Übung, MI03.09.011B

Es seien  $R = k[X_1, \dots, X_n]$  ein Polynomring ( $k$  ein Körper), und  $>$  eine monomiale Ordnung auf  $R^q$ .

### Aufgabe 1

Seien  $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_t \in R^q \setminus 0$ . Für  $\bar{h} \in R^t \setminus 0$  sei  $\delta(\bar{h}) = \max_i \{\text{LM}(h_i \bar{g}_i) : h_i \bar{g}_i \neq 0\}$ . Desweiteren seien  $\Phi : R^t \rightarrow R^t$  die "Liftungs-Abbildung" aus der Vorlesung (vgl. Def. vor 7.3.7), und  $\lambda : R^t \rightarrow R^q$ ,  $\bar{h} \mapsto \sum_i h_i \bar{g}_i$ ,  $\Lambda : R^t \rightarrow R^q$ ,  $\bar{h} \mapsto \sum_i h_i \text{LT}(\bar{g}_i)$ . Sei  $\bar{h} \in R^t \setminus \text{syz}(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_t)$ .

- (i)  $\text{LM}(\lambda(\bar{h})) \leq \delta(\bar{h})$ .
- (ii)  $\Phi(\bar{h}) \in \text{syz}(\text{LT}(\bar{g}_1), \dots, \text{LT}(\bar{g}_t)) \iff \text{LM}(\lambda(\bar{h})) < \delta(\bar{h})$ .
- (iii)  $\Lambda(\Phi(\bar{h})) = \text{LT}(\lambda(\bar{h})) \iff \text{LM}(\lambda(\bar{h})) = \delta(\bar{h})$ .

Es sei nun  $\bar{h} \in \text{syz}(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_t)$ . Dann gilt:

- (iv)  $\Phi(\bar{h}) \in \text{syz}(\text{LT}(\bar{g}_1), \dots, \text{LT}(\bar{g}_t))$ .

### Aufgabe 2

Seien  $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_t \in R^t \setminus 0$  und seien  $\delta$  und  $\Phi$  wie in Aufgabe 1 (bzw. Vorlesung) gegeben. Für jedes Monom  $\bar{N}$  in  $R^q$  sei

$$R_{\bar{N}}^t = \{\bar{h} = (c_1 X^{\alpha(1)}, \dots, c_t X^{\alpha(t)}) : c_i \in k, X^{\alpha(i)} \in \mathbb{N}^n, c_i = 0 \text{ oder } X^{\alpha(i)} \text{LM}(\bar{g}_i) = \bar{N}\}.$$

Die Elemente aus  $R_{\bar{N}}^t$  heißen *homogen vom Grad  $\bar{N}$* . Analog zu A2, Blatt 2, zeigt man, dass jedes  $\bar{h} \in R^t \setminus 0$  eine eindeutige Darstellung als (endliche) Summe von homogenen Elementen besitzt. Zeigen Sie:

- (i) Für jedes Monom  $\bar{N}$  ist  $R_{\bar{N}}^t$  eine (additive) Gruppe.
- (ii) Ist  $\bar{h} = \sum_j \bar{h}_{\bar{N}_j} \in R^t \setminus 0$  die (eindtg.) Darstellung von  $\bar{h}$  als Summe von homogenen Elementen,  $\bar{h}_{\bar{N}_j}$  homogen vom Grad  $\bar{N}_j$  mit  $\bar{N}_j > \bar{N}_{j+1}$ , so gilt  $\Phi(\bar{h}) = \bar{h}_{\bar{N}_1}$  und  $\delta(\bar{h}) = \bar{N}_1$ .
- (iii) Für  $c \in k$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  und  $\bar{h} \in R^t$  gilt  $\Phi(c\bar{h}) = c\Phi(\bar{h})$  und  $\Phi(X^\alpha \bar{h}) = X^\alpha \Phi(\bar{h})$ .

- (iv) Sind  $\bar{h}_1, \bar{h}_2 \in R^t \setminus 0$  mit  $\delta(\bar{h}_1) = \delta(\bar{h}_2)$ , so gilt  $\Phi(\bar{h}_1 + \bar{h}_2) = \Phi(\bar{h}_1) + \Phi(\bar{h}_2)$ .
- (v) Sind  $\bar{h}_1, \bar{h}_2 \in R^t \setminus 0$  mit  $\delta(\bar{h}_1) > \delta(\bar{h}_2)$ , so gilt  $\Phi(\bar{h}_1 + \bar{h}_2) = \Phi(\bar{h}_1)$ .
- (vi) Seien  $\bar{h}_1, \bar{h}_2 \in R^t \setminus 0$ . Dann gilt:  
 $\Phi(\bar{h}_1) = \Phi(\bar{h}_2) \iff \bar{h} = \bar{h}_1 - \bar{h}_2 = 0$  oder  $\delta(\bar{h}) < \delta(\bar{h}_1) = \delta(\bar{h}_2)$ .
- (vii) Für jedes homogene  $\bar{h} \in R^t$  gilt  $\Phi(\bar{h}) = \bar{h}$ .
- (viii) Für  $\bar{h} \in R^t \setminus 0$  ist  $\Phi(\bar{h})$  homogen vom Grad  $\delta(\bar{h})$ ; insbesondere gilt also  $\delta(\Phi(\bar{h})) = \delta(\bar{h})$ .

### Aufgabe 3

Seien  $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_t \in R^t \setminus 0$  gegeben. Sei  $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_m$  ein homogenes Erzeugendensystem von  $\text{syz}(\text{LT}(\bar{g}_1), \dots, \text{LT}(\bar{g}_t))$ ,  $\bar{s}_i$  homogen vom Grad  $\bar{N}_i$ . Weiterhin sei  $\bar{s} \in \text{syz}(\text{LT}(\bar{g}_1), \dots, \text{LT}(\bar{g}_t))$  homogen vom Grad  $\bar{N}$ . Dann gibt es  $c_1, \dots, c_m \in k$ , so dass gilt:  $\bar{N}_i$  teilt  $\bar{N}$  für jedes  $i$  mit  $c_i \neq 0$ , und  $\bar{s} = \sum_i c_i (\bar{N}/\bar{N}_i) \bar{s}_i$ .

### Aufgabe 4

Sei  $R = \mathbb{Q}[x, y, z]$ . Bestimmen Sie per Handrechnung ein Erzeugendensystem des  $R$ -Moduls  $\text{syz}(g_1, g_2, g_3)$  mit  $g_1 = xy - y^2$ ,  $g_2 = xz$ ,  $g_3 = y^2z$ .

(Hinweis: Überlegen Sie, ob  $g_1, g_2, g_3$  eine Gröbner-Basis bzgl. einer monomialen Ordnung ist.)

### Aufgabe 5

Schreiben Sie eine Singular-Prozedur `mySyz`, die auf Eingabe eines Tupels  $\bar{G} = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_t)$ ,  $\bar{g}_i \in R^q \setminus 0$ , wobei  $\bar{G}$  eine Gröbner-Basis von  $U = \text{span}_R \bar{G}$  ist, ein Erzeugendensystem des  $R$ -Moduls  $\text{syz}(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_t)$  berechnet.