Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 2004
Übungsblatt 5
21. Mai 2004

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1

Eine positivwertige Zufallsvariable X heisst *gedächtnislos*, wenn

$$\Pr[x > s + t \mid x > t] = \Pr[x > s] \quad \forall s, t > 0$$

gilt. Zeigen Sie, dass eine diskrete Zufallsvariable genau dann gedächtnislos ist, wenn sie geometrisch verteilt ist.

Aufgabe 2

Wir machen n Würfe mit einem Paar fairer Würfel. Zeigen Sie, dass für große n die Summe aller gewürfelten Augen mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit im Intervall $7n \pm 10\sqrt{35n/6}$ liegt.

Aufgabe 3

Seien $F(z)$ und $G(z)$ wahrscheinlichkeitserzeugende Funktionen für zwei Zufallsvariablen.[1] Sei $H(z) = F(G(z))$.

a) Drücken Sie $\mathbb{E}(H)$ und $\mathrm{Var}(H)$ durch H aus.

b) Drücken Sie $\mathbb{E}(H)$ und $\mathrm{Var}(H)$ durch $\mathbb{E}(F)$, $\mathrm{Var}(F)$, $\mathbb{E}(G)$ und $\mathrm{Var}(G)$ aus.

Aufgabe 4

Seien $X_1, \ldots, X_{2n}$ unabhängige Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung. Zeigen Sie, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\Pr\left[\left|\frac{X_1 + \cdots + X_{2n}}{2n} - \alpha\right| \leq \left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \alpha\right|\right] \geq \frac{1}{2}$$

[1] Für eine Zufallsvariable X mit Wertebereich aus $\mathbb{N}_0$ ist die warhscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_X(s) = \sum_{k \geq 0} \Pr[X = k] \cdot s^k$.