Diskrete Strukturen II

Zentralübung

Hanjo Täubig Sebastian Wernicke

14.05.2004

Raumänderung

Die Zentralübung findet an folgenden Tagen nicht im gewohnten Hörsaal statt, sondern im Hörsaal MW 1801 (Gebäude der Fakultät Maschinenwesen):

- Freitag, 18.06.2004 und
- Freitag, 16.07.2004

Aufgabe 1

Sei α eine irrationale Zahl.

Gibt es ein endliches Spiel mit einer fairen Münze, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Spieler gewinnt, gleich α ist?

Bemerkung:
Ein Spiel heißt endlich, wenn der Gewinner mit Wahrscheinlichkeit 1 nach einer endlichen Zahl von Zügen feststeht.

Aufgabe 1

Die Wahrscheinlichkeit p, dass ein bestimmter Spieler (nennen wir ihn A) gewinnt, ist

$$p = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A \text{ gewinnt mit dem } i\text{-ten Wurf}].$$

Für jedes i gewinnt A für eine bestimmte Anzahl $a_i \in \mathbb{N}_0$ von Ereignissen des Ereignisraums $\{K, Z\}^i$. Damit aber ist

$$p = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^i} = \frac{2^{n-1}a_1 + 2^{n-2}a_2 + \cdots + 2^1 a_{n-1} + 2^0 a_n}{2^n}.$$

Da das Spiel endlich ist, ist p ein endlicher Bruch und kann damit unmöglich irrational sein.

Aufgabe 2

Die Firma Data Systems Intl. Inc. (DSII) hat ein neues Freizeitgesetz für ihre Mitarbeiter erlassen:
Jeder Arbeiter muss an jedem Tag im Jahr arbeiten (also auch an Wochenenden und Feiertagen) außer einer von ihnen hat Geburtstag - dann bekommt die ganze Firma frei.

Wenn es 365 Tage im Jahr gibt und die Firma ihre Mitarbeiter rein zufällig einstellt (also nicht bevorzugt Leute mit gleichem Geburtstag), wie viele Leute sollte sie dann einstellen damit die erwartete kumulierte Anzahl der Arbeitstage aller Mitarbeiter maximiert wird?
Wie viele Tage muss jeder Arbeiter in diesem Fall pro Jahr arbeiten?

Aufgabe 2

Beispiel

Wenn die Firma DSII 10 Mitarbeiter mit unterschiedlichen Geburtstagen hat, dann leisten diese kumuliert $10 \cdot (365 - 10)$ Arbeitstage pro Jahr.

Beispiel

Wenn die Firma DSII 10 Mitarbeiter mit 7 unterschiedlichen Geburtstagen hat, dann leisten diese kumuliert $10 \cdot (365 - 7)$ Arbeitstage pro Jahr.

Aufgabe 2

Wir modellieren das Problem wie folgt:
In 365 Urnen $U_1, \ldots, U_{365}$ verteilen wir zufällig k Bälle und fragen uns, wie viele Urnen dabei leer bleiben.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Urne U_n nach k Würfen genau i Bälle enthält, ist

$$p_{k,i,n} := \Pr[k \text{ Würfe, } i \text{ Bälle in } U_n] = \binom{k}{i} \left(\frac{1}{365}\right)^i \left(1 - \frac{1}{365}\right)^{k-i}$$

Die Zufallsvariable X, welche die Anzahl der Urnen mit genau i Kugeln nach k Würfen angibt, ist binomialverteilt. Daher ist die erwartete Anzahl von Urnen mit i Bällen nach k Würfen gleich

$$\sum_{n=1}^{365} p_{k,i,n} = 365 \cdot \binom{k}{i} \left(\frac{1}{365}\right)^i \left(1 - \frac{1}{365}\right)^{k-i}$$

Aufgabe 2

Für $i = 0$ erhalten wir mit

$$365 \left(1 - \frac{1}{365}\right)^k$$

die zu erwartende Anzahl der leeren Urnen nach k Würfen.

Aufgabe 2

Zurück zu unserer Firma: Wir wollen die *kumulierte* Anzahl der Arbeitstage maximieren, suchen also

$$\arg\max_k f(k) = \arg\max_k \quad k \cdot 365 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right)^k$$

Das Maximum wird genau dann angenommen, wenn $f'(k) = 0$, also (mit Produktregel und $(c^x)' = c^x \ln c$, wobei $c > 0$ und $c \neq 1$)

$$365 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right)^k + 365k \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right)^k \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{365}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + k \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{365}\right) = 0$$

$$\Rightarrow k = -\frac{1}{\ln\left(1 - \frac{1}{365}\right)} \approx 364.49$$

Aufgabe 2

Da $f(364) = f(365)$, können wir der Firma nun sagen, dass sie am besten 364 Arbeiter anstellen soll.
Dann kann sie erwarten, dass insgesamt $f(364) = 48943.5$ Tage gearbeitet werden, also $f(364)/364 = 134.5$ Tage pro Arbeiter und Jahr.

Aufgabe 3

Für gegebenes n ziehen wir Zahlen aus $\{0, 1/n, 2/n, \ldots, 1\}$ mit Zurücklegen so lange, bis die Summe s der gezogenen Zahlen ≥ 1 ist.

Wie groß ist der Erwartungswert für die Anzahl der Zahlen, die wir ziehen müssen, wenn $n = 2$?

Bemerkung:
Wir werden im Verlauf der Vorlesung sehen, dass
$\mathbb{E}(\text{Anz. Züge}) \to e \quad \text{für } n \to \infty$

Aufgabe 3

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\text{Anz. Züge}] \\
&= \sum_i i \cdot Pr[i \text{ mal ziehen}] \\
&= \sum_i i \cdot Pr[\text{bis zum } i-1\text{-ten Zug } s < 1, \text{ danach } s \geq 1] \\
&= \sum_i i \cdot Pr[\text{im } i-1\text{-ten Zug } s = 0, \text{ danach 1 gezogen}] + \\
&\quad \sum_i i \cdot Pr[\text{im } i-1\text{-ten Zug } s = \frac{1}{2}, \text{ danach } \frac{1}{2} \text{ oder 1 gezogen}] \\
&= \sum_i i \cdot \frac{1}{3^i} + \sum_{i \geq 2} i \cdot \left(\frac{1}{3^{i-2}} \cdot \frac{i-1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{3}{4} + 2\sum_{i \geq 2} (i^2 - i)\frac{1}{3^i} = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2.25
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

Seien X und Y Zufallsvariablen für zwei unabhängige Ereignisse wobei

- $\mathbb{E}(Y) = 2$,
- $\mathbb{E}(X^2 Y) = 6$,
- $\mathbb{E}(XY^2) = 8$ und
- $\mathbb{E}((XY)^2) = 24$.

Wie groß ist $\mathbb{E}(X)$?

Aufgabe 4

Da X und Y unabhängig sind, gilt zunächst

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2Y) &= \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y) \\
\mathbb{E}(XY^2) &= \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y^2) \\
\mathbb{E}((XY)^2) &= \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)
\end{aligned}$$

Damit folgern wir:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(X) \cdot \frac{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Y^2)}{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Y^2)} \\
&= \frac{(\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y)) \cdot (\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y^2))}{\mathbb{E}(Y) \cdot (\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2))} \\
&= \frac{\mathbb{E}(X^2Y)\mathbb{E}(XY^2)}{\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X^2Y^2)} = \frac{6 \cdot 8}{2 \cdot 24} = 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Der Wiener Opernball muss kürzer werden!
Daher schlägt der Oberbürgermeister von Wien folgenden Ablauf für den nächsten Ball vor:

- Ursprünglich sind N Paare eingeladen.
- Vor jedem Tanz werden die Partner einander zugelost.
- Wer dabei seinen ursprünglichen Partner zum Tanzen zugelost bekommt, muss die Tanzfläche am Ende des jeweiligen Tanzes verlassen.

Wie viele Tänze $\mathbb{E}(X_N)$ sind auf dem nächsten Opernball zu erwarten?

Überlegen Sie sich zur Lösung der Aufgabe zunächst den Erwartungswert für $N = 1, 2, 3$ und beweisen Sie dann induktiv eine Verallgemeinerung Ihrer Überlegungen.

Aufgabe 5

Wir zeigen induktiv, dass $\mathbb{E}(X_N) = N$ für jedes $N \geq 1$.
Induktionsanfang: $N = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(X_1) = 1 \quad \surd$
Angenommen, $\mathbb{E}(X_i) = i$ für alle $i < N$.
Sei $p_N(n)$ die Wahrscheinlichkeit, dass von N Paaren genau n einander "passend" zugelost werden, also die Tanzfläche nach dem nächsten Tanz verlassen müssen.
Dann gilt (wenn man den ersten Tanz mit berücksichtigt)

$$\mathbb{E}(X_N) = 1+\sum_{n=0}^{N} p_N(n)\mathbb{E}(X_{N-n}) = 1+p_N(0)\mathbb{E}(X_N)+\sum_{n=1}^{N} p_N(n)\mathbb{E}(X_{N-n})$$

$$\Rightarrow (1 - p_N(0)) \cdot \mathbb{E}(X_N) = 1 + \sum_{n=1}^{N} p_N(n)\mathbb{E}(X_{N-n})$$

Aufgabe 5

Hinweis: Für die Zufallsvariable $Y_k =$"# Fixpunkte bei zufälliger Permutation von k Objekten" gilt $\mathbb{E}(Y_k) = 1$

Mit der Induktionsannahme und dem Hinweis zur Aufgabe erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&(1 - p_N(0)) \cdot \mathbb{E}(X_N) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{N} p_N(n)(N - n) = 1 + N \cdot \sum_{n=1}^{N} p_N(n) - \sum_{n=1}^{N} p_N(n) \cdot n \\
&= 1 + N \cdot (1 - p_N(0)) - \sum_{n=1}^{N} p_N(n) \cdot n \\
&= 1 + N \cdot (1 - p_N(0)) - \mathbb{E}(Y_N) = 1 + N \cdot (1 - p_N(0)) - 1 \\
&= N \cdot (1 - p_N(0))
\end{aligned}
$$

woraus wegen $1 - p_N(0) \neq 0$ unmittelbar die Behauptung folgt.

Raumänderung

Die Zentralübung findet an folgenden Tagen nicht im gewohnten Hörsaal statt, sondern im Hörsaal MW 1801 (Gebäude der Fakultät Maschinenwesen):

- Freitag, 18.06.2004 und
- Freitag, 16.07.2004