Diskrete Strukturen II

Zentralübung

Hanjo Täubig Sebastian Wernicke

11.06.2004

Raumänderung

Die Zentralübung findet an folgenden Tagen nicht im gewohnten Hörsaal statt, sondern wie folgt:

- Freitag, 18.06.2004: MW 1801
- Freitag, 09.07.2004: MI Hörsaal 3
- Freitag, 16.07.2004: MW 1801

Aufgabe 1

Nach der Klausur sollten Sie sich einen kleinen Kuchen gönnen. Und zwar einen von oben gesehen kreisförmigen mit 24cm Durchmesser.
Zu dumm nur, dass ein kugelförmiger Kirschkern mit einem Durchmesser von 1cm in den Kuchen geraten ist.
Wenn der Kuchen wie üblich in 12 gleich große keilförmige Teile geschnitten wird, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass Sie dabei nicht den Kirschkern treffen?

Aufgabe 1

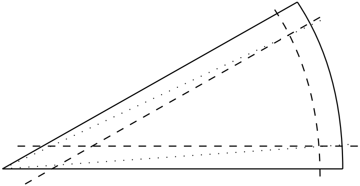
Betrachten wir ein einzelnes Kuchenstück, also ein Kreissegment mit Seitenlänge 12cm und einem Winkel von $360^\circ/12 = 30^\circ$ an der Spitze.
(Es reicht aus, die Projektion in die Ebene zu betrachten.)
Wir nehmen an, dass der Kirschkern vollständig im Kuchen verborgen ist. Das bedeutet, dass der Mittelpunkt des Kerns mindestens 0.5cm vom Rand des Kuchens entfernt ist.
Die Fläche des Kuchenstücks (von oben gesehen), an der sich der Mittelpunkt des Kerns befinden kann, ist

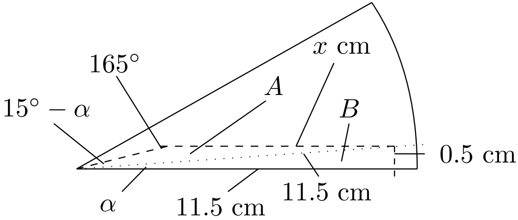
$$(r - 0.5)^2\pi/12 = (12 - 0.5)^2\pi/12 = 11.5^2\pi/12$$

Aufgabe 1

Wir fragen uns nun: Wo im Segment kann das Zentrum des Kirschkerns liegen, damit wir ihn nicht treffen?
Dazu muss er zusätzlich auch mindestens 0.5cm von jedem geraden Rand des Kuchenstücks entfernt liegen.
Da diese zusätzlichen Begrenzungen parallel zu den Schenkeln des äußeren Kreissegments sind, ergibt sich für das innere Stück auch ein Winkel von 30°.

Aufgabe 1





Aufgabe 1

$$F_{\text{Kern ungetroffen}} = (r - 0.5)^2 \pi / 12 - 2F_A - 2F_B$$

Zunächst einmal berechnen wir den Winkel α. Für diesen gilt

$$\sin \alpha = \frac{0.5 \text{ cm}}{11.5 \text{ cm}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 2.49^\circ$$

Damit ist

$$F_B = \frac{\alpha}{360}(r - 0.5)^2 \pi \approx 0.915\pi \approx 2.88$$

und wir können F_A berechnen:

$$F_A = \frac{1}{2} 0.5 \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 0.5 \cdot \left(\frac{11.5}{\sin(165^\circ)} \sin(15^\circ - \alpha) \right) \approx 2.41$$

Hiermit ergibt sich unmittelbar:

$$\Pr[\text{Kern verpasst}] = \frac{F_{\text{Kern ungetroffen}}}{\frac{11.5^2 \pi}{12}} \approx \frac{34.62 - 2 \cdot 2.41 - 2 \cdot 2.88}{34.72} \approx 69.2\%$$

Aufgabe 1

Zur Berechnung kann auch folgende Näherung angesetzt werden: Um die Fläche des 'inneren Segments' zu berechnen, können wir die Differenz der Radien im Vgl. zum äußeren Segment verwenden. Der Abstand zwischen Mittelpunkt des Kuchens und der Spitze des kleinen Kreissegments berechnet sich wie folgt:

$$\frac{0.5}{\sin(75^\circ)} \cdot \tan(75^\circ) = \frac{0.5}{\cos(75^\circ)}$$

Aufgabe 1

Nun setzen wir die Fläche des kleinen Kreissegments ins Verhältnis zu der Fläche, die alle möglichen Positionen des Kernmittelpunkts beschreibt:

$$
\begin{aligned}
\Pr[\text{Kern nicht getroffen}] &= \frac{(12 - 0.5 - 0.5/\cos(75^\circ))^2 \cdot \pi/12}{(12 - 0.5)^2 \cdot \pi/12} \\
&= \frac{(11.5 - 0.5/\cos(75^\circ))^2}{11.5^2} \\
&= 69.22\%
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

Eigentlich ist ein Münzwurf deterministisch: Der Mathematiker Joe Keller hat 1986 in der Zeitschrift *American Mathematical Monthly* darüber berichtet, dass, wenn eine Münze mit dem Kopf nach oben geworfen wird, sie genau dann wieder mit Kopf nach oben landet, wenn

$$\left(2n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} \cdot \frac{g}{v} < \omega < \left(2n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} \cdot \frac{g}{v} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

wobei v die vertikale Wurfgeschwindigkeit, g die allgemeine Gravitationskonstante (9.81 m/s^2) und ω die Drehgeschwindigkeit der Münze um eine horizontale Achse sei.
Wenn wir eine Münze mit zufälliger vertikaler Wurfgeschwindigkeit und Drehgeschwindigkeit werfen - wobei zu anfangs Kopf nach oben zeigt - wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass sie wieder mit Kopf nach oben landet?

Aufgabe 2

Sei

$$f_n^-(v) = \left(2n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} \cdot \frac{g}{v}$$

und

$$f_n^+(v) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} \cdot \frac{g}{v}$$

Dann ist das Verhältnis von Kopf- zu Zahl-Würfen gegeben durch

$$\frac{\int_0^\infty f_0^+(v)\ \mathrm{dv} + \sum_{n=1}\int_0^\infty f_n^+(v) - f_n^-(v)\ \mathrm{dv}}{\sum_{n=1}\int_0^\infty f_n^-(v) - \left(2n - \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2} \cdot \frac{g}{v}\ \mathrm{dv}} =$$

$$= \frac{\int_0^\infty f_0^+(v)\ \mathrm{dv} + \sum_{n=1}\int_0^\infty \frac{\pi}{2} \cdot \frac{g}{v}\ \mathrm{dv}}{\sum_{n=1}\int_0^\infty \frac{\pi}{2} \cdot \frac{g}{v}\ \mathrm{dv}} = \frac{\int_0^\infty f_0^+(v)\ \mathrm{dv}}{\sum_{n=1}\int_0^\infty \frac{\pi}{2} \cdot \frac{g}{v}\ \mathrm{dv}} + 1 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^\infty f_0^+(v)\ \mathrm{dv}}{n \cdot \int_0^\infty \frac{\pi}{2} \cdot \frac{g}{v}\ \mathrm{dv}} + 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} + 1 = 1$$

Aufgabe 2

Und deshalb ist $\Pr[\text{Kopf}] = \Pr[\text{Zahl}] = \frac{1}{2}$, wenn ω und v wirklich gleichverteilt sind - was leider nicht der Fall ist, denn Diaconis gibt an, dass typischerweise

$$\begin{aligned} 35 \cdot 2\pi \text{ rad s}^{-1} &\leq \omega \leq 40 \cdot 2\pi \text{ rad s}^{-1} \\ 2.1 \text{ m s}^{-1} &\leq v \leq 2.7 \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

In diesem Fall hat man einen Bias.

P. Diaconis.
The problem of thinking too much.
http://www.amacad.org/publications/bulletin/spring2003/diaconis.pdf
(2003)

Aufgabe 3

Wir wählen mit Wahrscheinlichkeit $\Pr[k] = 2^{-(k+1)}$ eine ganze Zahl $k \geq 0$.

Dann würfeln wir k mal und addieren die Ergebnisse der einzelnen Würfe.

Welche Summe erwarten wir bei welcher Varianz?

Aufgabe 3

Wir verwenden unser Ergebnis von Aufgabe 3 des 5. Übungsblatts. Die Erzeugende G für die Wahl von k ist

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{k\geq 0} 2^{-(k+1)} z^k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{2}z\right)^k = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2} = \frac{1}{2-z} \end{aligned}$$

$$G'(z) = \frac{1}{(z-2)^2} \quad\Rightarrow\quad \mathbb{E}(G) = G'(1) = 1$$

$$G''(z) = -\frac{2}{(z-2)^3}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Var}(G) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2 = 2 + 1 - 1^2 = 2$$

Aufgabe 3

Für ein einzelnes Würfelexperiment erwartet man für das Ergebnis X, dass $\mathbb{E}(X) = 3.5$ bei einer Varianz von $\mathrm{Var}(X) = \frac{35}{12}$. Für die Summe Y, die wir bei unserem Experiment erwarten, gilt nach Aufgabe 3 des 5. Übungsblatts, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(G) \cdot \mathbb{E}(X) \\ &= 1 \cdot 3.5 = 3.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{Var}(G) \cdot \mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(G) \cdot \mathrm{Var}(X) \\ &= 2 \cdot 3.5^2 + 1 \cdot \frac{35}{12} = \frac{329}{12} \approx 27.4 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Peter und Paul spielen ein Spiel, bei dem jeder von ihnen mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ gewinnt.
In jeder Runde setzt jeder von ihnen 10 EUR ein (der Gewinner erhält dann 20 EUR).

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Peter 100 EUR Gewinn gemacht hat, bevor er 50 EUR Verlust macht?

Wenn Peter erst mal seinen Gewinn hat, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass er insgesamt auf 50 EUR Verlust kommt?

Aufgabe 4

Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass Peter 50 EUR gewinnt, ohne je vorher 50 EUR verloren zu haben.
Wegen der Symmetrie des Spiels ist p auch die Wahrscheinlichkeit, dass Peter 50 EUR verliert, ohne je vorher 50 EUR gewonnen zu haben.
Dann ist

$$\begin{aligned} P_{100} &:= \Pr[\text{P. gewinnt 100 ohne vorher 50 Verlust zu haben}] \\ &= p^2 + p^2 \cdot P_{100} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_{100} = \frac{p^2}{1 - p^2}$$

Aufgabe 4

Unabhängig davon ist die Wahrscheinlichkeit, 150 EUR zu verlieren, gegeben durch

$$\Pr[150 \text{ verlieren}] = p \cdot \Pr[150 \text{ verlieren} \mid 50 \text{ verloren}]$$

$$\begin{aligned}\Pr[150 \text{ verlieren} \mid 50 \text{ verloren}] &= p \cdot \Pr[150 \text{ verlieren}] + \\ &\quad p \cdot \Pr[150 \text{ verlieren} \mid 100 \text{ verloren}]\end{aligned}$$

$$\Pr[150 \text{ verlieren} \mid 100 \text{ verloren}] = p + p \cdot \Pr[150 \text{ verlieren} \mid 50 \text{ verloren}]$$

$$\Longrightarrow \quad \Pr[150 \text{ verlieren}] = -\frac{p^2}{p^2 + p - 1}$$

Aufgabe 4

Wir müssen nun noch p berechnen. Dies ist jedoch einfach: Für jedes Spiel gibt es genau zwei Fälle: Entweder, Peter gewinnt 50 EUR, ohne vorher 50 verloren zu haben, oder umgekehrt. Aus Symmetriegründen sind beide Fälle gleich wahrscheinlich, so dass $p = 1/2$. Damit haben wir

$$\Pr[\text{P. gewinnt 100 ohne vorher 50 Verlust zu haben}] = \frac{p^2}{1-p^2} = \frac{1}{3}$$

$$\Pr[\text{150 verlieren}] = -\frac{p^2}{p^2+p-1} = \frac{1}{3}$$

Klausureinsicht

Termin für die Midterm-Klausureinsicht:

Dienstag, 15.06.2004
9:30-11:30 Uhr
Raum: 03.09.011 (Besprechungsraum)

Raumänderung

Die Zentralübung findet an folgenden Tagen nicht im gewohnten Hörsaal statt, sondern wie folgt:

- Freitag, 18.06.2004: MW 1801
- Freitag, 09.07.2004: MI Hörsaal 3
- Freitag, 16.07.2004: MW 1801