Diskrete Strukturen II

Zentralübung

Hanjo Täubig Sebastian Wernicke

18.06.2004

Raumänderung

Die Zentralübung findet an folgenden Tagen nicht im gewohnten Hörsaal statt, sondern wie folgt:

- Freitag, 09.07.2004: MI Hörsaal 3
- Freitag, 16.07.2004: MW 1801

Aufgabe 1

Gegeben sei ein Kreis mit Radius 1.
Wir wählen zufällig (gleichverteilt über der Fläche) einen Punkt innerhalb des Kreises.

Was ist die Dichte der Verteilung des Abstands zwischen dem Punkt und dem Kreismittelpunkt?

Aufgabe 1

Sei D der Abstand des Punktes zum Mittelpunkt.
Für $0 \leq k \leq 1$ ist

$$\Pr[D \leq k] = \frac{k^2 \cdot \pi}{1^2 \cdot \pi} = k^2$$

Da für eine Verteilungsfunktion $F(x)$ zu einer Dichte $f(x)$ gilt, dass

$$F(x) = \int_{\infty}^{x} f(t)\, \mathrm{dt} \qquad \text{bzw.} \qquad f(t) = F'(t)$$

folgt unmittelbar, dass die Dichte der Verteilung des Abstands zwischen dem Punkt und dem Kreismittelpunkt gleich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dk}} k^2 = 2k$$

ist.

Aufgabe 2

Der Mathematiker J. Bertrand stellte 1888 folgende Frage, um einen Einwand gegen die Verwendung von Wahrscheinlichkeiten bei überabzählbaren Ereignismengen zu konstruieren:

> *Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig in einen Kreis gezeichnete Sehne länger als die Seite eines einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks?*

Aufgabe 2

Wir werden diesen Einwand, der auch als “Bertrands Paradoxon” bekannt ist, im folgenden nachvollziehen und widerlegen.

a) *Die erste Lösung.* Beantworten Sie Bertrands Frage unter der Annahme “Jede Sehne eines Kreises ist durch ihre 2 Endpunkte auf dem Kreisbogen eindeutig bestimmt”.

b) *Die zweite Lösung.* Beantworten Sie Bertrands Frage unter der Annahme “Jede Sehne hat einen Mittelpunkt. Der Mittelpunkt liegt entweder im Inkreis des Dreiecks oder außerhalb”.

c) *Kein Paradoxon.* Lösen Sie das Paradoxon auf!

Bemerkung: Es gibt noch mehr Lösungswege als die a) und b) gezeigten. Siehe hierzu auch S. 103 und 104 des DS-II Buchs von Schickinger / Steger, in welchem unter anderem Teilaufgabe b) besprochen wird.

Aufgabe 2

a) Gegeben sei eine beliebige Sehne.
Wir drehen das einbeschriebene Dreieck so, dass einer seiner Eckpunkte mit einem Endpunkt der Sehne übereinstimmt.
Dann liegt der andere Endpunkt entweder auf dem Kreisbogen über der dem ersten Endpunkt gegenüberliegenden Dreiecksseite oder aber auf einem der Kreisbögen über den am Endpunkt anliegenden Seiten des Dreiecks.
Genau dann, wenn der zweite Punkt der Sehne auf dem gegenüberliegenden Kreisbogen liegt, ist die Sehne länger als die Seitenlänge des Dreiecks.
Die Länge der Kreisbögen für die günstigen zu den ungünstigen Fällen verhält sich wie 1:2, und daher ist eine zufällig eingezeichnete Sehne mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ länger als die Dreiecksseite.

Aufgabe 2

b) Die Sehne ist genau dann länger, wenn ihr Mittelpunkt im Inkreis liegt.
Dieser hat den halben Radius des ursprünglichen Kreises, seine Fläche beträgt also $1/4$ der Fläche des Gesamtkreises - eine zufällig eingezeichnete Sehne ist aus diesem Grund mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ länger als die Dreiecksseite.

Aufgabe 2

c) Der Begriff "zufällige Sehne" ist nur scheinbar wohldefiniert. In a) und b) wurden zwei verschiedene Zufallsexperimente beschrieben, denen eine jeweils andere Definition von "zufällig" zugrund liegt.

Aufgabe 3

Eine Dichte im $\mathbb{R}^n$ ist eine nichtnegative integrierbare Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = 1$$

und

$$\Pr[\, a_1 \le X_1 \le b_1, \ldots, a_n \le X_n \le b_n \,]$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

Die entsprechende Verteilungsfunktion ist durch

$$F(x) = \Pr[\{y \in \mathbb{R}^n \;:\; y \le x\}]$$

gegeben.

Aufgabe 3

Sei $F(x, y)$ eine auf $\mathbb{R}^2$ stetige Funktion, die in jeder Koordinate monoton wachsend ist und für die $F(0,0) = 0$ sowie $F(1,1) = 1$ gilt.
Ferner sei F für gegebenes x nur an endlich vielen y nicht differenzierbar und umgekehrt.

Zeigen Sie, dass es ein solches F gibt, das keine Verteilungsfunktion ist.

Aufgabe 3

Betrachte die Funktion $F(x, y) := \max(x, y)$.
Diese weist alle geforderten Eigenschaften auf.
Angenommen, F wäre die Verteilungsfunktion für ein Wahrscheinlichkeitsmaß Pr, dann würde für

$$A =](0,0),(1,\frac{1}{2})] \qquad \text{und} \qquad B =](0,0),(\frac{1}{2},1)]$$

gelten, dass

$$\Pr[A] = \Pr[B] = 1$$

aber

$$\Pr[A \cap B] = 1/2$$

Aufgabe 4

Zwei reelle Zahlen x und y werden zufällig (gleichverteilt) aus $]0,1[$ gewählt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $[x/y]$ (die zu x/y am nächsten liegende ganze Zahl) gerade ist?

Hinweis: Wir sehen 0 für diese Aufgabe als gerade Zahl an. Am besten geben Sie Ihre Antwort in der Form $r + s \cdot \pi$ mit rationalen Zahlen r und s an.

Aufgabe 4

Nehmen wir zunächst $x > y$ an.
Damit für beliebiges $k \in \mathbb{N}^+$ gilt, dass $[x/y] = 2k$, muss

$$2k - 1/2 \leq x/y \leq 2k + 1/2$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2k+1/2} \leq y \leq \frac{x}{2k-1/2}$$

gelten.

$$\Pr[\ [x/y] \text{ gerade} \mid x > y\ ] = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x}{2k-1/2} - \frac{x}{2k+1/2}\ \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{4x}{16k^2-1}\ \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{16k^2-1} = 1 - \pi/4$$

Die Arbeit der letzten Summation sollte man sich unbedingt von Maple abnehmen lassen.

Aufgabe 4

Nehmen wir nun an, dass $x < y$. Dann haben wir

$$\Pr[\,[x/y] \text{ gerade} \mid x < y\,] = \Pr[\,x/y \le 1/2\,] = \Pr[\,x \le y/2\,] =$$

$$= \int_0^1 y/2 \,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}$$

Insgesamt haben wir also

$$\begin{aligned}
\Pr[\,[x/y] \text{ gerade}\,] &= \Pr[\,[x/y] \text{ gerade } \text{ und } x > y\,] + \\
&\quad \Pr[\,[x/y] \text{ gerade } \text{ und } x < y\,] \\
&= (1 - \pi/4) + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\pi \approx 46.4\%.
\end{aligned}$$

Klausureinsicht

Weiterer Termin für Midterm-Klausureinsicht:

Freitag, 18.06.2004
14:45-16:00 Uhr
(im Anschluss an diese Zentralübung)
Raum: 03.09.011 (Besprechungsraum)

Raumänderung

Die Zentralübung findet an folgenden Tagen nicht im gewohnten Hörsaal statt, sondern wie folgt:

- Freitag, 09.07.2004: MI Hörsaal 3
- Freitag, 16.07.2004: MW 1801