WS 2003/04

Diskrete Strukturen I

Ernst W. Mayr

mayr@in.tum.de
Institut für Informatik
Technische Universität München

12-12-2003

Die elementaren Zählfunktionen (Forts.)

Abzählkoeffizienten

Das Pascalsche Dreieck

$\binom{n}{k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Beobachtung: Die Zeilensumme in der n-ten Zeile ist 2^n.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Lemma

Für die Spaltensumme bis zur n-ten Zeile gilt:

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1} \qquad \forall n, k \geq 0$$

Beweis

(Vollständige Induktion über n)

Induktionsanfang: $n = 0$

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} = \binom{0}{k} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\stackrel{!}{=} \binom{0+1}{k+1} = \binom{1}{k+1} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lemma

Für die Spaltensumme bis zur n-ten Zeile gilt:

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1} \qquad \forall n, k \geq 0$$

Beweis

(Vollständige Induktion über n)

Induktionsanfang: $n = 0$

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} = \binom{0}{k} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\stackrel{!}{=} \binom{0+1}{k+1} = \binom{1}{k+1} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Induktionsschluss: $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n+1}\binom{m}{k} &= \sum_{m=0}^{n}\binom{m}{k} + \binom{n+1}{k} \\ &= \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}\end{aligned}$$

q. e. d.

Lemma

Für die Diagonalsumme gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{C}$$

Beweis

(Vollständige Induktion über n)

Induktionsanfang: $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{m+k}{k} = \binom{m}{0} = 1$$

$$\stackrel{!}{=} \binom{0+m+1}{0} = \binom{m+1}{0} = 1$$

Lemma

Für die Diagonalsumme gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{C}$$

Beweis

(Vollständige Induktion über n)

Induktionsanfang: $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{m+k}{k} = \binom{m}{0} = 1$$

$$\stackrel{!}{=} \binom{0+m+1}{0} = \binom{m+1}{0} = 1$$

Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \binom{m+k}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} + \binom{m+n+1}{n+1}\\ &= \binom{m+n+1}{n} + \binom{m+n+1}{n+1}\\ &= \binom{m+n+2}{n+1}\end{aligned}$$

q. e. d.

Beobachtungen:

- Negation

$$(-x)^{\underline{k}} = (-1)^k \cdot x^{\overline{k}}$$

- Binomialsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

Spezialfälle:

1. $x = y = 1$:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

(Beweis zur Zeilensumme!)

Beobachtungen:

- Negation

$$(-x)^{\underline{k}} = (-1)^k \cdot x^{\overline{k}}$$

- Binomialsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

Spezialfälle:

1. $x = y = 1$:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

(Beweis zur Zeilensumme!)

Beobachtungen:

- Negation

$$(-x)^{\underline{k}} = (-1)^k \cdot x^{\overline{k}}$$

- Binomialsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

Spezialfälle:

1. $x = y = 1$: $$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

(Beweis zur Zeilensumme!)

-

2. $y = 1$:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k$$

3. $x = -1, y = 1$:

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ ungerade}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ gerade}}}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

-
   2. $y = 1$:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k$$

   3. $x = -1, y = 1$:

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

Satz (Vandermonde-Identität)

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \cdot \binom{y}{n-k} \qquad n \in \mathbb{N}_0, x, y \in \mathbb{C}$$

Beweis

Seien zunächst $x, y \in \mathbb{N}$.

Zur Verdeutlichung sei z. B. x die Anzahl der Wahlmänner der Demokraten und y die Anzahl der Wahlmänner der Republikaner. $\binom{x+y}{n}$ ist dann die Anzahl der Möglichkeiten, aus $(x+y)$ Wahlmännern n auszuwählen. Dementsprechend ist $\binom{x}{k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, aus x Demokraten k auszuwählen, und $\binom{y}{n-k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, aus y Republikanern $(n-k)$ auszuwählen.

Damit überlegt man sich leicht, dass die Formel für $x, y \in \mathbb{N}$ gilt.

Satz (Vandermonde-Identität)

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \cdot \binom{y}{n-k} \qquad n \in \mathbb{N}_0, x, y \in \mathbb{C}$$

Beweis

Seien zunächst $x, y \in \mathbb{N}$.

Zur Verdeutlichung sei z. B. x die Anzahl der Wahlmänner der Demokraten und y die Anzahl der Wahlmänner der Republikaner. $\binom{x+y}{n}$ ist dann die Anzahl der Möglichkeiten, aus $(x+y)$ Wahlmännern n auszuwählen. Dementsprechend ist $\binom{x}{k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, aus x Demokraten k auszuwählen, und $\binom{y}{n-k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, aus y Republikanern $(n-k)$ auszuwählen.

Damit überlegt man sich leicht, dass die Formel für $x, y \in \mathbb{N}$ gilt.

Erweiterung auf $x, y \in \mathbb{C}$: Setze $y =$ const. Damit stehen links und rechts ein Polynom n-ten Grades in x:

$$p_l(x) \stackrel{!}{=} p_r(x)$$

Für $x \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$p_l(x) - p_r(x) = 0$$

Dieses Polynom hat unendlich viele Nullstellen. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist dann

$$p_l(x) - p_r(x) \equiv 0$$

Das heißt, $p_l(x)$ und $p_r(x)$ sind identisch. *q. e. d.*

Erweiterung auf $x, y \in \mathbb{C}$: Setze $y =$ const. Damit stehen links und rechts ein Polynom n-ten Grades in x:

$$p_l(x) \stackrel{!}{=} p_r(x)$$

Für $x \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$p_l(x) - p_r(x) = 0$$

Dieses Polynom hat unendlich viele Nullstellen. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist dann

$$p_l(x) - p_r(x) \equiv 0$$

Das heißt, $p_l(x)$ und $p_r(x)$ sind identisch. *q. e. d.*

Stirling-Zahlen der ersten Art

Lemma

Mit

$$s_{0,0} = 1$$

und

$$s_{n,k} = 0 \quad k \leq 0, n > 0$$

gilt:

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k} \qquad \forall n, k > 0 \ .$$

Beweis

Für Permutationen auf $\{1,\ldots,n\}$ mit k Zyklen gilt:

Entweder: n bildet einen Zyklus der Länge 1:

$$\pi = \underbrace{(*\cdots*)(*\cdots*)\ldots}_{\substack{\text{Permutation auf}\\ \{1,\ldots,n-1\}\\ \text{mit } (k-1) \text{ Zyklen}}}(n)$$

Dafür gibt es $s_{n-1,k-1}$ Möglichkeiten.

Oder: n ist in einem Zyklus der Länge ≥ 2 enthalten.
Streiche n aus dieser Permutation:

$$\pi' = \underbrace{(*^{\downarrow} \cdots *^{\downarrow})(*^{\downarrow} \cdots *^{\downarrow}) \ldots (*^{\downarrow} \cdots *^{\downarrow})}_{\substack{\text{Permutation auf} \\ \{1,\ldots,n-1\} \\ \text{mit } k \text{ Zyklen}}}$$

Die $^{\downarrow}$ bezeichnen Stellen, an denen n gestrichen worden sein könnte $\big($immer hinter der jeweiligen Zahl, da $(^{\downarrow}* \cdots *)$ zyklisch mit $(* \cdots *^{\downarrow})$ identisch ist$\big)$. Dafür gibt es $n-1$ mögliche Stellen.
Damit ergeben sich hier $(n-1)s_{n-1,k}$ Möglichkeiten.
Die beiden Fälle sind disjunkt, also können die Möglichkeiten addiert werden. *q. e. d.*

Oder: n ist in einem Zyklus der Länge ≥ 2 enthalten.
Streiche n aus dieser Permutation:

$$\pi' = \underbrace{(*^{\downarrow} \cdots *^{\downarrow})(*^{\downarrow} \cdots *^{\downarrow}) \ldots (*^{\downarrow} \cdots *^{\downarrow})}_{\substack{\text{Permutation auf} \\ \{1,\ldots,n-1\} \\ \text{mit } k \text{ Zyklen}}}$$

Die $^{\downarrow}$ bezeichnen Stellen, an denen n gestrichen worden sein könnte $\big($immer hinter der jeweiligen Zahl, da $(^{\downarrow}* \cdots *)$ zyklisch mit $(* \cdots *^{\downarrow})$ identisch ist$\big)$. Dafür gibt es $n-1$ mögliche Stellen.
Damit ergeben sich hier $(n-1)s_{n-1,k}$ Möglichkeiten.
Die beiden Fälle sind disjunkt, also können die Möglichkeiten addiert werden. *q. e. d.*

Oder: n ist in einem Zyklus der Länge ≥ 2 enthalten.
Streiche n aus dieser Permutation:

$$\pi' = \underbrace{(*^{\downarrow} \cdots *^{\downarrow})(*^{\downarrow} \cdots *^{\downarrow}) \ldots (*^{\downarrow} \cdots *^{\downarrow})}_{\substack{\text{Permutation auf} \\ \{1,\ldots,n-1\} \\ \text{mit } k \text{ Zyklen}}}$$

Die $^{\downarrow}$ bezeichnen Stellen, an denen n gestrichen worden sein könnte $\big($immer hinter der jeweiligen Zahl, da $(^{\downarrow}* \cdots *)$ zyklisch mit $(* \cdots *^{\downarrow})$ identisch ist$\big)$. Dafür gibt es $n-1$ mögliche Stellen.
Damit ergeben sich hier $(n-1)s_{n-1,k}$ Möglichkeiten.
Die beiden Fälle sind disjunkt, also können die Möglichkeiten addiert werden. *q. e. d.*

Stirling-Dreieck der ersten Art

$s_{n,k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k} \qquad \forall n,k > 0$$

Es gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left[x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k\right].$$

Beweis

(Vollständige Induktion)

Induktionsanfang: $n = 0$

$$x^{\underline{0}} = 1 \stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{0}(-1)^{0-k} s_{0,k} \cdot x^k = s_{0,0} = 1$$

Es gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left[x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k\right].$$

Beweis

(Vollständige Induktion)

Induktionsanfang: $n = 0$

$$x^{\underline{0}} = 1 \stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{0} (-1)^{0-k} s_{0,k} \cdot x^k = s_{0,0} = 1$$

Induktionsschluss: $n \to n+1$

$$
\begin{aligned}
x^{\underline{n+1}} &= (x-n) \cdot x^{\underline{n}} \\
&= (x-n) \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot s_{n.k} \cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k+1} \cdot n \cdot s_{n,k} \cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n-k+1} \cdot \left(s_{n,k-1} + n \cdot s_{n,k} \right) \cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \cdot s_{n+1,k} \cdot x^k
\end{aligned}
$$

q. e. d.

Induktionsschluss: $n \to n+1$

$$
\begin{aligned}
x^{\underline{n+1}} &= (x-n) \cdot x^{\underline{n}} \\
&= (x-n) \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot s_{n.k} \cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k+1} \cdot n \cdot s_{n,k} \cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n-k+1} \cdot \left(s_{n,k-1} + n \cdot s_{n,k} \right) \cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \cdot s_{n+1,k} \cdot x^k
\end{aligned}
$$

q. e. d.

Induktionsschluss: $n \to n+1$

$$
\begin{aligned}
x^{\underline{n+1}} &= (x-n)\cdot x^{\underline{n}} \\
&= (x-n)\cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\cdot s_{n.k}\cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\cdot s_{n,k}\cdot x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k+1}\cdot n\cdot s_{n,k}\cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n-k+1}\cdot \left(s_{n,k-1} + n\cdot s_{n,k}\right)\cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k}\cdot s_{n+1,k}\cdot x^k
\end{aligned}
$$

q. e. d.

Induktionsschluss: $n \to n+1$

$$
\begin{aligned}
x^{\underline{n+1}} &= (x-n)\cdot x^{\underline{n}} \\
&= (x-n)\cdot \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\cdot s_{n.k}\cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\cdot s_{n,k}\cdot x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k+1}\cdot n\cdot s_{n,k}\cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n-k+1}\cdot \left(s_{n,k-1}+n\cdot s_{n,k}\right)\cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\cdot s_{n+1,k}\cdot x^k
\end{aligned}
$$

q. e. d.

Induktionsschluss: $n \rightarrow n+1$

$$\begin{aligned}
x^{\underline{n+1}} &= (x-n) \cdot x^{\underline{n}} \\
&= (x-n) \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot s_{n.k} \cdot x^{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k+1} \cdot n \cdot s_{n,k} \cdot x^{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n-k+1} \cdot \left(s_{n,k-1} + n \cdot s_{n,k} \right) \cdot x^{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \cdot s_{n+1,k} \cdot x^{k}
\end{aligned}$$

q. e. d.

Stirling-Zahlen der zweiten Art

Lemma

Es gilt:

$$\forall n, k \in \mathbb{N}_0 \quad S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k} \ .$$

Beweis

Sei $N = \{1, \ldots, n\}$.

In einer Partition von N in k Teilmengen gilt

entweder: $\{n\}$ tritt als solches in der Partition auf:

$$\underbrace{N_1 \uplus N_2 \uplus \ldots \uplus N_{k-1}}_{\substack{\text{Partition von} \\ \{1,\ldots,n-1\} \\ \text{in } (k-1) \text{ Teilmengen}}} \uplus \{n\}$$

$\Rightarrow S_{n-1,k-1}$ Möglichkeiten

Stirling-Zahlen der zweiten Art

Lemma

Es gilt:

$$\forall n, k \in \mathbb{N}_0 \quad S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k} \;.$$

Beweis

Sei $N = \{1, \ldots, n\}$.

In einer Partition von N in k Teilmengen gilt

entweder: $\{n\}$ tritt als solches in der Partition auf:

$$\underbrace{N_1 \uplus N_2 \uplus \ldots \uplus N_{k-1}}_{\substack{\text{Partition von} \\ \{1,\ldots,n-1\} \\ \text{in } (k-1) \text{ Teilmengen}}} \uplus \{n\}$$

$\Rightarrow S_{n-1,k-1}$ Möglichkeiten

Stirling-Zahlen der zweiten Art

Lemma

Es gilt:

$$\forall n, k \in \mathbb{N}_0 \quad S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k} \ .$$

Beweis

Sei $N = \{1, \ldots, n\}$.

In einer Partition von N in k Teilmengen gilt

entweder: $\{n\}$ tritt als solches in der Partition auf:

$$\underbrace{N_1 \uplus N_2 \uplus \ldots \uplus N_{k-1}}_{\substack{\text{Partition von} \\ \{1,\ldots,n-1\} \\ \text{in } (k-1) \text{ Teilmengen}}} \uplus \{n\}$$

$\Rightarrow S_{n-1,k-1}$ Möglichkeiten

oder: n ist in einem N_i mit ≥ 2 Elementen enthalten:

$$N_1 \uplus N_2 \uplus \ldots \uplus N_k$$

Streiche n. Betrachte:

$$\underbrace{N_1 \setminus \{n\} \uplus N_2 \setminus \{n\} \uplus \ldots \uplus N_k \setminus \{n\}}_{\text{Partition von } \{1,\ldots,n-1\} \text{ in } k \text{ Klassen}}$$

$\Rightarrow S_{n-1,k}$ Möglichkeiten. n kann an einer von k Stellen entfernt worden sein:

$\Rightarrow$ insgesamt $k \cdot S_{n-1,k}$ Möglichkeiten in diesem Fall. *q. e. d.*

oder: n ist in einem N_i mit ≥ 2 Elementen enthalten:

$$N_1 \uplus N_2 \uplus \ldots \uplus N_k$$

Streiche n. Betrachte:

$$\underbrace{N_1 \setminus \{n\} \uplus N_2 \setminus \{n\} \uplus \ldots \uplus N_k \setminus \{n\}}_{\text{Partition von } \{1,\ldots,n-1\} \text{ in } k \text{ Klassen}}$$

$\Rightarrow S_{n-1,k}$ Möglichkeiten. n kann an einer von k Stellen entfernt worden sein:

$\Rightarrow$ insgesamt $k \cdot S_{n-1,k}$ Möglichkeiten in diesem Fall. *q. e. d.*

oder: n ist in einem N_i mit ≥ 2 Elementen enthalten:

$$N_1 \uplus N_2 \uplus \ldots \uplus N_k$$

Streiche n. Betrachte:

$$\underbrace{N_1 \setminus \{n\} \uplus N_2 \setminus \{n\} \uplus \ldots \uplus N_k \setminus \{n\}}_{\text{Partition von } \{1, \ldots, n-1\} \text{ in } k \text{ Klassen}}$$

$\Rightarrow S_{n-1,k}$ Möglichkeiten. n kann an einer von k Stellen entfernt worden sein:
$\Rightarrow$ insgesamt $k \cdot S_{n-1,k}$ Möglichkeiten in diesem Fall. *q. e. d.*

oder: n ist in einem N_i mit ≥ 2 Elementen enthalten:

$$N_1 \uplus N_2 \uplus \ldots \uplus N_k$$

Streiche n. Betrachte:

$$\underbrace{N_1 \setminus \{n\} \uplus N_2 \setminus \{n\} \uplus \ldots \uplus N_k \setminus \{n\}}_{\text{Partition von } \{1, \ldots, n-1\} \text{ in } k \text{ Klassen}}$$

$\Rightarrow S_{n-1,k}$ Möglichkeiten. n kann an einer von k Stellen entfernt worden sein:
$\Rightarrow$ insgesamt $k \cdot S_{n-1,k}$ Möglichkeiten in diesem Fall. *q. e. d.*

Stirling-Dreieck der zweiten Art

$S_{n,k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	1	3	1			
4	0	1	7	6	1		
5	0	1	15	25	10	1	
6	0	1	31	90	65	15	1

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$$

Einige Eigenschaften:

$$
\begin{aligned}
S_{n,1} &= 1\\
S_{n,2} &= \frac{2^n-2}{2} = 2^{n-1}-1\\
S_{n,n-1} &= \binom{n}{2}\\
S_{n,n} &= 1
\end{aligned}
$$

Einige Eigenschaften:

$$
\begin{aligned}
S_{n,1} &= 1 \\
S_{n,2} &= \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1 \\
S_{n,n-1} &= \binom{n}{2} \\
S_{n,n} &= 1
\end{aligned}
$$

Einige Eigenschaften:

$$
\begin{aligned}
S_{n,1} &= 1 \\
S_{n,2} &= \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1 \\
S_{n,n-1} &= \binom{n}{2} \\
S_{n,n} &= 1
\end{aligned}
$$

Einige Eigenschaften:

$$
\begin{aligned}
S_{n,1} &= 1 \\
S_{n,2} &= \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1 \\
S_{n,n-1} &= \binom{n}{2} \\
S_{n,n} &= 1
\end{aligned}
$$

Bemerkung:

Es gibt auch andere Notationen für die Stirling-Zahlen zweiter Art, z. B.:

$$S_{n,k} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$$

z. B. in Graham, Knuth, Pataschnik: Concrete Mathematics

Auflistung von Permutationen

Definition

Seien $\pi = (\pi_1\ \pi_2\ \cdots\ \pi_n)$ und $\sigma = (\sigma_1\ \sigma_2\ \cdots\ \sigma_n)$ zwei Permutationen aus S_n, $\pi \neq \sigma$. Dann heißt π *lexikographisch kleiner als* σ, *geschrieben* $\pi < \sigma$, *genau dann, wenn*

$$(\exists 1 \le k \le n)(\forall 1 \le i \le k)\Big[(\pi_i = \sigma_i) \wedge (\pi_k < \sigma_k)\Big]\,.$$

Beispiel

$n = 3, N = \{1, 2, 3\}$:

$$(1\ 2\ 3) < (1\ 3\ 2) < (2\ 1\ 3) < (2\ 3\ 1) < (3\ 1\ 2) < (3\ 2\ 1)$$

Auflistung von Permutationen

Definition

Seien $\pi = (\pi_1\ \pi_2\ \cdots\ \pi_n)$ und $\sigma = (\sigma_1\ \sigma_2\ \cdots\ \sigma_n)$ zwei Permutationen aus S_n, $\pi \neq \sigma$. Dann heißt π *lexikographisch kleiner als* σ, *geschrieben* $\pi < \sigma$, *genau dann, wenn*

$$(\exists 1 \leq k \leq n)(\forall 1 \leq i \leq k)\Big[(\pi_i = \sigma_i) \wedge (\pi_k < \sigma_k)\Big] .$$

Beispiel

$n = 3, N = \{1, 2, 3\}$:

$$(1\ 2\ 3) < (1\ 3\ 2) < (2\ 1\ 3) < (2\ 3\ 1) < (3\ 1\ 2) < (3\ 2\ 1)$$

Algorithmus zur Auflistung von S_n in lexikographischer Ordnung:

Gegeben: $N = \{1, 2, \ldots, n\}$

```
appendlexlist(string praefix, set N)
  if N={a} then print(praefix ∘ a)
  else
    for k ∈ N in aufsteigender Reihenfolge do
      appendlexlist(praefix ∘ k, N\{k})
    od
  fi
end
```

Aufruf: *appendlexlist(λ, N)*