$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{k-i}$$

Rekursion:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Pascalsches Dreieck:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}$$

Zur Berechnung von $\binom{n}{k}$ genügen $\mathcal{O}(k \cdot n)$ Additionen.

Pascalsches Dreieck

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Rekursion:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad (n, k > 0)$$

Spaltensumme:

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{\ell=k}^{n} \binom{\ell}{k}$$

Bew mit vollst. Induktion über Anzahl der Summanden

$$\binom{n}{n} = \binom{n-1}{n} + \binom{n-1}{n-1} = 0 + \binom{n-1}{n-1}$$

Vollst. Induktion: $\binom{n}{n} = \binom{0}{0} = 1$

$\binom{n}{n} = \left|\binom{N}{n}\right| = 1$, für Menge N mit n Elementen.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \dots \qquad \text{Bew. per Ind.}$$

$$(a+b)^{n+1} = a\cdot\sum_{k=0}^{n} \dots + b\sum_{k=0}^{n} \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k} b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{k} b^{n+1-k} + \dots$$

$$= \underbrace{\binom{n}{0}}_{=\binom{n+1}{0}} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)}_{=\binom{n+1}{k}} a^{k} b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=\binom{n+1}{n+1}} a^{n+1} b^{0}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{k} b^{n+1-k}$$

$$\boxed{2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}}$$

Eine k-Permutation erhält man dadurch, daß man nacheinander Elemente aus der Menge N herausnimmt und sie der Reihe nach hinlegt. Fürs erste Element gibt es n Möglichkeiten, dann $n-1, \dots$

Zu '**Multimengen**' (Mu 1)

1. **Beweis des Satzes**: Seien $N = \{1, 2, \dots, n\}$ und $M = N \cup \{n+1, n+2, \dots n+k-1\}$. Sei $K = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ eine k-Multimenge (Kardinalität k). O.B.d.A sei K geordnet:

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \dots \leq a_k$.

Sei $f : K \to M$ die folgende Abbildung

$$f: \quad \begin{aligned} a_1 &\longrightarrow a_1 \\ a_2 &\longrightarrow a_2 + 1 \\ a_3 &\longrightarrow a_3 + 2 \\ &\vdots \\ a_k &\longrightarrow a_k + k - 1 \end{aligned}$$

f ist injektiv

$|f(K)| = k$

$f(K) \subseteq M$.

Sei $U \subseteq M$, $|U| = k$, und sei $U = \{b_1, \dots, b_k\}$ mit $b_1 < b_2 < \dots < b_k\}$.

Dann gibt es eine k-Multimenge $K' = \{a_1', \dots, a_k'\}$ und eine Abbildung $f' : K' \to U$ mit $f'(a_i') = b_i$, $b_1 = a_1'$, $b_2 = a_2' + 1$, $b_3 = a_3' + 2$, $\dots$ $b_k = a_k' + k - 1$. f' ist injektiv.

Also ist die Zahl der k-Multimengen über N gleich der Zahl der k-Untermengen von M, d.h.

$$= \binom{n+k-1}{k}.$$

2. Bew. des Satzes (vgl. Buch Steger). Mu 2

k-Multimenge über N dargestellt durch ein lineares Feld (array) der Länge $n+k$. In jedes Feldelement darf eine Kugel gelegt werden; es gibt n weiße und k schwarze Kugeln. Ins erste (linkeste) "Loch" kommt immer eine weiße Kugel. Jedes so gefüllte Feld repräsentiert eine k-Multimenge K über $N=\{1,\dots,n\}$:
Die i-te weiße Kugel (von links) repräsentiert $i \in N$, die Anzahl der schwarzen Kugeln rechts von der i-ten weißen (bis zur $(i+1)$-ten weißen) gibt an, wie oft i in K vorkommt

Beisp: $N=\{1,\dots,5\}$

○●○●●○●○○●● $\longleftrightarrow$ $\{1,2,2,3,5,5\}$

Da die erste Kugel immer weiß sein muß, gibt es $\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten aus der Menge der $n+k-1$ Feldelemente k auszuwählen, in die schwarze Kugeln kommen.

Ziehen von $k = 2$ Elementen aus einer Menge mit $n = 3$ Elementen

	geordnet	ungeordnet
mit Zurücklegen Multimenge	$(1,1), (1,2), (1,3)$ $(2,1), (2,2), (2,3)$ $(3,1), (3,2), (3,3)$	$\{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}$ $\{2,2\}, \{2,3\}, \{3,3\}$
ohne Zurücklegen k - Permutation	$(1,2), (1,3), (2,1)$ $(2,3), (3,1), (3,2)$	$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$

Ziehen von k Elementen aus einer n-elementige Menge

Anzahl Möglichkeiten

Abbildungen von $\{1, \dots, k\}$ nach $\{1, \dots, n\} = N$

	geordnet	ungeordnet	
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$	k-Multimengen
ohne Zurücklegen	$n^{\underline{k}}$	$\binom{n}{k}$	k-Untermengen

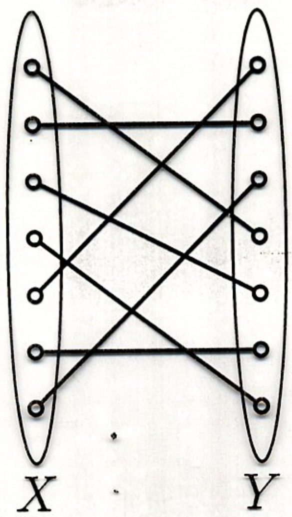
k-Permutationen

$k=1$: n. Induktion

$k+1$: Abb. entsteht durch Ergänzung einer Abb von $\{1, \dots k\} \to N$ um Bild von $k+1$ – dafür ex n Möglichkeiten. $n^k \cdot n = n^{k+1}$

Anzahl Abbildungen

1. Bijektive Abbildungen $f : X \to Y$



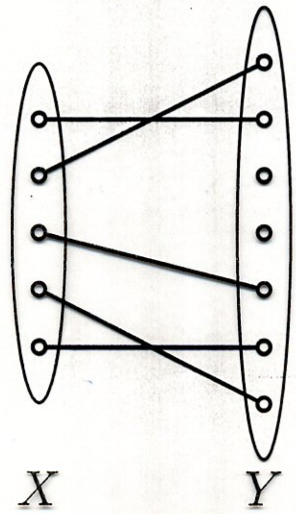
Es muss gelten: $|X| = |Y|$.

Bijektive Abbildungen $f : X \to X$ nennt man auch *Permutationen*

Beispiel: $X = [n] = \{1, 2, \ldots, n\}$

- Es gibt genau $n!$ Permutationen $\pi : [n] \to [n]$.
- Es gibt genau $(n-k)!$ Permutationen $\pi : [n] \to [n]$ für die genau k Werte $\pi(v_1), \ldots, \pi(v_k)$ vorgegeben sind.

3. Injektive Abbildungen $f : X \to Y$



Es muss gelten: $|X| \leq |Y|$.

Beispiel: $X = [k], Y = [n]$ mit $k \leq n$

- Es gibt genau $n^{\underline{k}}$ injektive Abbildungen $\pi : [k] \to [n]$.

Nachdem das erste Bild $\pi(1)$ festgelegt ist (n Möglichk.) bleiben für $\pi(2)$ nur $n-1$ Möglichkeiten etc.

Zur Erinnerung:

- $n^{\underline{k}}$ bezeichnet die fallende Faktorielle von n der Länge k:

$$n^{\underline{k}} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

1.) $S_{n,k} = 0$ für $n < k$

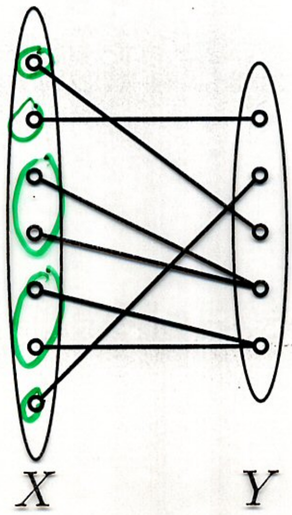
Also: $|N| = n \leq |R| = r \rightsquigarrow$

$$\sum_{k=0}^{r} S_{n,k}\, r^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}\, r^{\underline{k}}$$

2.) $\binom{r}{k} = 0$ für $k > r$. Also $|N| = n > |R| = r \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \sum_{k=0}^{r} \left(\binom{r}{k} k!\, S_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{r}{k} k!\, S_{n,k} \right)$$

2. Surjektive Abbildungen $f : X \to Y$



Es muss gelten: $|X| \geq |Y|$.

Beispiel: $X = [m]$, $Y = [n]$ mit $m \geq n$

- Es gibt genau $S_{m,n} \cdot n!$ surjektive Abbildungen $\pi : [m] \to [n]$.. Denn π partitioniert $[m]$ in die Mengen $\pi^{-1}(y)$, $y \in Y$: Es gibt $S_{m,n}$ solcher n-Partitionen.

Zur Erinnerung:

- $S_{n,k}$ sind die *Stirlingzahlen 2. Art* Für jede n-Partition gibt es $n!$ Abbildungen π (Zuordnungen der Elemente von Y zu den Partitionsklassen)

Stirlingzahlen 1. Art.

- Permutationen mit genau 1 Zyklus:

  $(\underbrace{1\ 2\ \dots (n-1)\ n}$)

  alle $n!$ Anordnungen der n Zahlen, aber nicht die jeweils n zyklischen Verschiebungen einer Anordnung unterscheiden — Also $\frac{n!}{n} = s_{n,1}$

- Perm. mit genau $n-1$ Zyklen:

  $n-2$ einelementige Zyklen (i)
  eine zweielementige: $(j\ k)$

- Dreieckskonstruktion : 2 Fälle

  — Permutation von $[1, 2, \dots, n-1]$ mit $k-1$ Zyklen plus Zyklus (n) : $s_{n-1,k-1}$

  — Perm. von $[1, \dots, n-1]$ mit k Zyklen plus Einfügen von n einen dieser Zyklen — dafür ex. $n-1$ Möglichkeiten: $(n-1) \cdot s_{n-1,k}$

vgl. Buch: Steger, DS1.

Anzahl Möglichkeiten 3 Bälle in 2 Urnen zu plazieren

	Urnen unterscheidbar	Urnen nicht unterscheidbar
Bälle a, b, c unterscheidbar	$(\emptyset, \{a,b,c\})$, $(\{a\}, \{b,c\})$, $(\{b\}, \{a,c\})$, $(\{c\}, \{a,b\})$, $(\{a,b\}, \{c\})$, $(\{a,c\}, \{b\})$, $(\{b,c\}, \{a\})$, $(\{a,b,c\}, \emptyset)$	$\{\emptyset, \{a,b,c\}\}$, $\{\{a\}, \{b,c\}\}$, $\{\{b\}, \{a,c\}\}$, $\{\{c\}, \{a,b\}\}$
Bälle nicht unterscheidbar	$(0,3), (1,2), (2,1), (3,0)$	$\{0,3\}, \{1,2\}$

Interpretation als

Abbildung : Menge der Bälle $B \longrightarrow$ Menge der Urnen

Zerlegung : Zahl der Bälle in so viele Summanden wie Urnen vorhanden.

Anzahl Möglichkeiten n Bälle in m Urnen zu plazieren

n Abb. $[n] \longrightarrow [m]$

	Urnen unterscheidbar	Urnen nicht unterscheidbar
Bälle unterscheidbar	* m^n	$\sum_{k=1}^{m} S_{n,k}$
Bälle nicht unterscheidbar	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\sum_{k=1}^{m} P_{n,k}$

* Ziehen von n Elementen aus $[m]$ mit Zurücklegen.

Alle B. in eine U. aufteilen auf 2 U., ... $S_{n,1} + S_{n,2} + \dots$

n zerlegen in 1. Summand, 2 Summanden etc.

n Bälle in eine Reihe legen
$m-1$ Trennstriche ~~dazwischen~~ platzieren
Dh aus $n+m-1$ Objekten,
genau $m-1$ auswählen.