Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik und
Grundlagen der Künstlichen Intelligenz
Prof. Dr. Dr. h.c. Wilfried Brauer

Wintersemester 2004/05
Diskrete Strukturen I
Übungsblatt 3
18. November 2004
Sebastian Wernicke

Diskrete Strukturen I

9. Mindestinverses

Sei G ein Gruppe, deren Trägermenge eine gerade Anzahl von Elementen hat. Beweisen Sie, dass es mindestens ein $g \in G$ mit $g \neq 1$ gibt, so dass $g = g^{-1}$.
(Hinweis: Partitionieren sie G in Abhängigkeit von der Eigenschaft $g = g^{-1}$.)

10. Gruppensymmetrie

Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und $G = \mathrm{Sym}(M)$ die symmetrische Gruppe von M, d.h. G ist die Menge aller bijektiven Abbildungen von M nach M mit der Komposition als binärem Operator. Sei $N \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass

$$H = \{f \in G \mid f(N) = N\}$$

eine Untergruppe von G ist.
(Hinweis: Es genügt, zu zeigen, dass 1) $H \neq \emptyset$ und 2) $\forall a, b \in H \quad ab^{-1} \in H$. Machen Sie sich bitte klar, warum dies gilt!)

11. Boolesche Eigenschaften

Beweisen Sie, dass eine Boolesche Algebra $A = \langle S, \oplus, \otimes, \sim, 0, 1\rangle$ (bei Teilaufgabe d sollen nur endliche S bertrachtet werden) folgende Eigenschaften besitzt. Dabei gibt $\mathrm{atom}(a)$ für $a \in S$ an, ob a ein Atom der Algebra ist oder nicht.

a) eindeutiges Inverses:

$$b \oplus c = 1 \wedge b \otimes c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = \sim b$$

b) De-Morgan-Regeln:

$$\begin{aligned} \sim(b \oplus c) &= \sim b \otimes \sim c \\ \sim(b \otimes c) &= \sim b \oplus \sim c \end{aligned}$$

c) elementare Eigenschaft von Atomen I:

$$\mathrm{atom}(a) \wedge \mathrm{atom}(b) \wedge a \neq b \quad \Rightarrow \quad a \otimes b = 0$$

d) elementare Eigenschaft von Atomen II:

$$\text{Falls } (\forall a \in S)[\mathrm{atom}(a) \Rightarrow a \otimes b = 0], \text{ dann } b = 0$$