

---

## Diskrete Strukturen I

---

### 19. Binomialkoeffizienten

- a) Schreiben Sie  $\binom{n}{5}$  als Polynom in  $n$ .  
b) Beweisen Sie:

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

### 20. Stirlingzahlen (2. Art)

Bezeichne  $S_{n,k}$  die Stirling-Zahlen zweiter Art, also die Anzahl verschiedener Partitionen einer  $n$ -elementigen Menge in  $k$  nichtleere, paarweise disjunkte Teilmengen. Zeigen Sie

- a)  $S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$ .  
b)  $S_{n,n-1} = \binom{n}{2}$ .

### 21. WM-Organisation

Als Mitglied des WM-Organisationsteams sollen Sie den Spielplan der Fussball-WM ausarbeiten. Die (nach der Vorrunde) im Turnier verbliebenen Mannschaften spielen den Weltmeister nach einem k.o.-Schema aus. An jedem Tag soll genau eine Partie abgehalten werden.

- a) Es seien noch 8 Mannschaften im Turnier. Hierzu gibt es 4 Viertelfinalsple (V<sub>1</sub>, ..., V<sub>4</sub>), 2 Halbfinalspiele (H<sub>1</sub>, H<sub>2</sub>) und ein Finale (F). Beachten Sie die logischen Voraussetzungen für den Ablauf im Spielplan: H<sub>1</sub> kann erst stattfinden, wenn V<sub>1</sub> und V<sub>2</sub> beide ausgetragen wurden. H<sub>2</sub> kann erst stattfinden, wenn V<sub>3</sub> und V<sub>4</sub> beide ausgetragen wurden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 7 Spiele unter Einhaltung der vorgegebenen Abfolgebedingungen, an 7 aufeinanderfolgenden Tagen abzuhalten?
- b) Gehen Sie allgemein davon aus, dass 2<sup>n</sup> Mannschaften durch ein k.o.-Schema den Weltmeister unter sich ausspielen. Es bezeichne T<sub>n</sub> die Anzahl der Möglichkeiten, die 2<sup>n</sup> - 1 hierzu anstehenden Spiele in eine zeitliche Reihenfolge zu bringen. Geben Sie eine Formel an, wie man rekursiv T<sub>n+1</sub> aus T<sub>n</sub> berechnen kann.

### 22. Nervennahrung

5 Studenten essen 10 Tafeln Schokolade. Wieviele Möglichkeiten gibt es jeweils, diese gesundheitsbewusste Mahlzeit aufzuteilen?

- a) Sie essen 10 nicht unterscheidbare Tafeln, sind aber von einander unterscheidbar (es ist also nicht egal, wer wieviele bekommt).
- b) Sie essen 10 nicht unterscheidbare Tafeln, sind untereinander nicht unterscheidbar, und jeder isst mindestens eine Tafel.
- c) Sie essen 10 unterschiedliche Tafeln und davon soll jeder genau 2 bekommen.