Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Dr. Peter Ullrich
Dmytro Chibisov

SS 2005
Übungsblatt 8
8. Juni 2005

Algorithmische Algebra I

(Abgabe: Mittwoch, 15.6.05, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Sei $I \subseteq \mathbb{Q}[X_1, ..., X_N]$ ein Ideal. Implementieren Sie in CoCoA (ohne Verwendung der Dimensionsberechnung) die Prozedur `IsFinite(I:IDEAL)`, die als Ausgabe 1 liefert, falls $V(I)$ endlich ist, und 0 sonst.

Aufgabe 2

Sei $I \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$. Implementieren Sie in CoCoA die Prozedur `QBasis(I:IDEAL)`, die die Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraumes $\mathbb{Q}[x, y]/(\mathrm{LT}(\sqrt{I}))$ (als Liste) liefert, falls $V(I)$ endlich ist, und eine leere Liste sonst. Finden Sie ein Ideal $I \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$ mit $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[x, y]/(\mathrm{LT}(\sqrt{I})) \neq \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[x, y]/(\mathrm{LT}(I))$.

Hinweis: In CoCoA kann man das Radikal eines Ideals mit `Radical(I:IDEAL)` berechnen.

Aufgabe 3

Sei R ein Ring. Zeigen Sie:

(a) Je zwei verschiedene maximale Ideale $\mathfrak{m}_1 \neq \mathfrak{m}_2$ von R sind teilerfremd.

(b) Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von R, so gilt $\sqrt{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$.

(c) Sei I ein Ideal von R, und es gelte $I = \bigcap_{j \in A} \mathfrak{m}_j$, wobei $A \neq \emptyset$ eine Indexmenge und jedes $\mathfrak{m}_j$ ein maximales Ideal ist. Dann gilt $\sqrt{I} = I$.

(d) Speziell sei $R = k[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten X, k sei ein Körper. Genau dann ist $I = (f)$ ein maximales Ideal, wenn f irreduzibel in $k[X]$ ist.

Aufgabe 4

Sei $f(X) = (X - a)^2 + b^2 \in \mathbb{R}[X]$ mit $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$. Zeigen Sie:

(a) Das Ideal $I = (f) \subseteq \mathbb{R}[X]$ ist ein maximales Ideal von $\mathbb{R}[X]$ und es gilt $I \neq \mathfrak{m}_c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$. (Bem.: In $\mathbb{R}[X]$ gibt es somit maximale Ideale, die nicht von der Form $\mathfrak{m}_c = (x - c)$ $(c \in \mathbb{R})$ sind.)

(b) Sei $J = (f)_{\mathbb{C}}$ das von f in $\mathbb{C}[X]$ erzeugte Ideal. Zeigen Sie, dass es maximale Ideale $\mathfrak{m}_i$ von $\mathbb{C}[X]$ $(i = 1, 2)$ gibt mit $J = \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$. Ist J ein maximales Ideal von $\mathbb{C}[X]$? (Begründung). Bestimmen Sie zudem die algebraische Menge $V(J) \subseteq \mathbb{C}$.