Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr/Dr. Sven Kosub
Stefan Eckhardt

Sommersemester 2005
Übungsblatt 4
13. Mai 2005

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

Abgabetermin: 24.05.2005 **vor** *der Vorlesung*

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Konstruieren Sie einen Graphen mit n Knoten und $m = n \cdot \lceil \log n \rceil$ Kanten, bei dem der Boruvka-Algorithmus nur $O(m)$ Schritte benötigt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei T der Spannbaum eines ungerichteten, gewichteten, einfachen, zusammenhängenden Graphen $G = (V, E, w)$. Man betrachtet die Ausführung des MST-Algorithmus von Boruvka auf T und erzeugt dazu den folgenden *Boruvka-Baum* $\mathcal{B}(T) = (W, F, l)$:

- Für jeden Knoten $v \in V$ wird ein Blatt $f(v) \in W$ hinzugefügt.
- Sei $A = \{t_1, \ldots, t_k\}$ die Menge der Teilbäume, die in einer Phase zu einem Baum vereinigt werden. Der Knoten $f(A)$ wird zu W hinzugefügt. Außerdem wird die Kante $(f(t_i), f(A))$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ in F eingefügt. Das Gewicht der Kante $l((f(t_i), f(A))) = w(e)$, entspricht dem Gewicht der Kante $e \in E(T)$, die der Boruvka-Algorithmus in dieser Phase gewählt hat, um t_i an den Baum A anzuschließen.

1. Zeigen Sie, dass der Baum $\mathcal{B}(T)$ höhenbalanciert ist und dass jeder innere Knoten mindestens zwei Kinder besitzt.
2. Zeigen Sie, dass man den Baum $\mathcal{B}(T)$ in $O(n)$ Schritten aus dem Baum T erzeugen kann.
3. Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorihmus, der testet, ob ein Baum T ein minimaler Spannbaum von G ist. Verwenden Sie dazu den Boruvkabaum $\mathcal{B}(T)$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Zeigen Sie, wie man den Boruvka-Algorithmus implementieren muss, damit die modifizierte Version des Algorithmus nur $O(n^2)$ Schritte benötigt.