2.6 Doppeltstochastische Matrizen

Wie berechnet man die nach Satz 148 (eindeutig bestimmte) stationäre Verteilung, gegen die ergodische endliche Markov-Ketten für jede Startverteilung konvergieren?

Eine Möglichkeit besteht darin, das lineare Gleichungssystem $\pi \cdot P = \pi$ aufzustellen und zu lösen. Für größere Matrizen ist dieses Verfahren allerdings im Allgemeinen sehr aufwendig. Wir stellen hier einen anderen Ansatz vor.

Definition 149

Eine $n \times n$ Matrix $P = (p_{ij})_{0 \le i,j < n}$ heißt stochastisch, falls alle Einträge p_{ij} nichtnegativ und alle Zeilensummen gleich Eins sind:

$$\sum_{j=0}^{n-1} p_{ij} = 1 \text{ für alle } i = 0, \ldots, n-1.$$

Sind zusätzlich auch alle Spaltensummen gleich 1, also

$$\sum_{i=0}^{n-1} p_{ij} = 1 \text{ für alle } j = 0, \ldots, n-1,$$

so nennt man P doppeltstochastisch.

Die Übergangsmatrix einer Markov-Kette ist immer stochastisch, und umgekehrt.

Lemma 150

Ist P eine doppeltstochastische $n \times n$ Matrix, so ist $\pi = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 bezüglich Multiplikation von links:

$$\pi = \pi \cdot P.$$

Beweis:

Für alle $0 \le k < n$ gilt:

$$(\pi \cdot P)_k = \sum_{i=0}^{n-1} \pi_i \cdot p_{ik} = \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} p_{ik}}_{=1} = \frac{1}{n} = \pi_k.$$

$\square$

Zusammen mit Satz 148 erhalten wir damit sofort:

Satz 151

Für jede ergodische endliche Markov-Kette $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ mit doppeltstochastischer Übergangsmatrix gilt unabhängig vom Startzustand

$$\lim_{t\to\infty} q_t = (\tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}),$$

wobei n die Kardinalität der Zustandsmenge bezeichne.

Beweis:

Klar! $\square$

Beispiel 152

Anna und Bodo verabreden sich wieder einmal zu einer Partie Poker. Misstrauisch geworden durch ihre Verluste beim letzten Rendezvous verdächtigt Anna mittlerweile ihren Spielpartner, beim Mischen zu mogeln. Um ganz sicher zu gehen, dass die Karten zukünftig auch wirklich gut gemischt werden, schlägt sie folgendes Verfahren vor: Der Stapel mit Karten wird verdeckt hingelegt und dann werden m-mal zwei Karten daraus zufällig ausgewählt und diese vertauscht. Soll Bodo dieser Prozedur zustimmen?

Beispiel 152

Wir modellieren den oben skizzierten Mischvorgang durch eine Markov-Kette. Als Zustandsmenge S wählen wir alle möglichen Anordnungen der Karten. Identifizieren wir die Karten mit den Zahlen $[n] = \{1, \ldots, n\}$, so besteht S aus der Menge aller Permutationen der Menge $[n]$.

Betrachten wir nun zwei verschiedene Permutationen $\sigma, \rho \in S$. Nach Definition der Markov-Kette ist die Übergangswahrscheinlichkeit $p_{\sigma,\rho}$ genau dann positiv, wenn es $i, j \in [n]$, $i \neq j$, gibt, so dass

$$\rho(k) = \begin{cases} \sigma(j) & \text{falls } k = i, \\ \sigma(i) & \text{falls } k = j, \\ \sigma(k) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 152

Da nach Voraussetzung i und j zufällig gewählt werden (und es genau $\binom{n}{2}$ solcher Paare i, j gibt), gilt in diesem Fall $p_{\sigma,\rho} = 1/\binom{n}{2}$.

Da man jede Vertauschung zweier Karten durch nochmaliges Vertauschen wieder rückgängig machen kann, sieht man auch sofort ein, dass $p_{\sigma,\rho} = p_{\rho,\sigma}$ gilt. Die Übergangsmatrix P ist also symmetrisch und damit insbesondere auch doppeltstochastisch. Aus Satz 151 folgt somit, dass die Markov-Kette unabhängig von der Startverteilung in die Gleichverteilung konvergiert.

Der von Anna vorgeschlagene Mischvorgang ist also in der Tat sinnvoll: Für $m \to \infty$ konvergiert die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die sich ergebende Kartenreihenfolge gegen die Gleichverteilung, die Karten sind also bestens gemischt!

Beispiel 152

Anmerkung: Man kann zeigen, dass für n Karten bereits $m = O(n \log n)$ Vertauschungen genügen, um einen gut durchmischten Kartenstapel zu erhalten.

3. Prozesse mit kontinuierlicher Zeit

3.1 Einführung

Wir betrachten nun Markov-Ketten $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_0^+}$.

Wie beim Übergang von der geometrischen zur Exponentialverteilung können wir uns auch hier einen Grenzprozess vorstellen.

Wie dort folgt, dass die Aufenthaltsdauer im Zustand 0 gemessen in Schritten der diskreten Markov-Kette geometrisch verteilt ist und im Grenzwert $n \to \infty$ in eine kontinuierliche Zufallsvariable übergeht, die exponentialverteilt mit Parameter λ ist. Den Parameter λ bezeichnen wir auch als Übergangsrate.

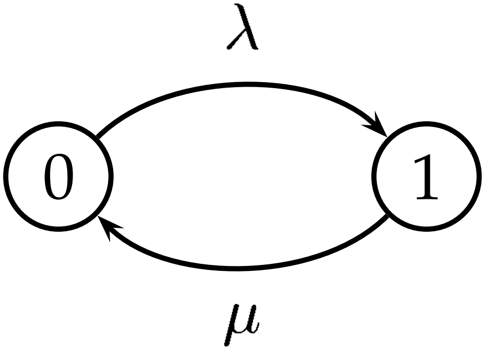

Abbildung: Markov-Kette mit kontinuierlicher Zeit

Definition 153

Eine unendliche Folge von Zufallsvariablen $X(t)$ $(t \in \mathbb{R}_0^+)$ mit Wertemenge S nennen wir (diskrete) Markov-Kette mit kontinuierlicher Zeit, wenn gilt:

- S ist diskret, d.h. wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $S \subseteq \mathbb{N}_0$.
- Die Zufallsvariablen erfüllen die Markovbedingung:
  Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und beliebige Zeitpunkte $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t$ und Zustände $s, s_1, \ldots, s_n \in S$ gilt

$$\begin{aligned}\Pr[X(t) = s \mid X(t_n) = s_n, \ldots, X(t_0) = s_0] &= \\ \Pr[X(t) = s \mid X(t_n) = s_n]&. \end{aligned} \tag{13}$$

Eine Markov-Kette heißt zeithomogen, wenn für alle Zustände $i, j \in S$ und für alle $u, t \in \mathbb{R}_0^+$ gilt:

$$\Pr[X(t+u) = j \mid X(t) = i] = \Pr[X(u) = j \mid X(0) = i]$$

Die Markov-Bedingung (13) besagt anschaulich Folgendes: Wenn wir den Zustand des Systems zu einer Reihe von Zeitpunkten $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ kennen, so ist für das Verhalten nach dem Zeitpunkt t_n nur der Zustand zur Zeit t_n maßgebend. Anders formuliert heißt dies: Wenn wir den Zustand des Systems zur Zeit t_n kennen, so besitzen wir bereits die gesamte relevante Information, um Wahrscheinlichkeiten für das zukünftige Verhalten zu berechnen. Die „Geschichte" des Systems, d.h. der „Weg", auf dem der Zustand zur Zeit t_n erreicht wurde, spielt dabei keine Rolle. Eine Markov-Kette mit kontinuierlicher Zeit ist also ebenso wie eine Markov-Kette mit diskreter Zeit gedächtnislos.

Wie schon bei diskreten Markov-Ketten werden wir uns auch bei Markov-Ketten mit kontinuierlicher Zeit auf zeithomogene Markov-Ketten beschränken und diese Eigenschaft im Folgenden stillschweigend voraussetzen.

Gedächtnislosigkeit der Aufenthaltsdauer

Sei Y die Aufenthaltsdauer in einem bestimmten Zustand, in dem sich die Markov-Kette zur Zeit $t = 0$ befindet. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\Pr[Y \geq t] &= \Pr[X(t') = 0 \text{ für alle } 0 < t' < t \mid X(0) = 0] \\
&= \Pr[X(t'+u) = 0 \text{ für alle } 0 < t' < t \mid X(u) = 0] \\
&= \Pr[X(t'+u) = 0 \text{ für alle } 0 < t' < t \mid X(t'') = 0 \text{ f. a. } 0 \leq t'' \leq u] \\
&= \Pr[X(t') = 0 \text{ für alle } 0 < t' < t+u \mid X(t'') = 0 \text{ f. a. } 0 \leq t'' \leq u] \\
&= \Pr[Y \geq t+u \mid Y \geq u].
\end{aligned}$$

Die Aufenthaltsdauer Y erfüllt also die Bedingung der Gedächtnislosigkeit und muss daher nach Satz 104 exponentialverteilt sein.

Bestimmung der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten

Wie zuvor bei Markov-Ketten mit diskreter Zeit interessieren wir uns auch bei kontinuierlichen Markov-Ketten für die Wahrscheinlichkeit, mit der sich das System zur Zeit t in einem bestimmten Zustand befindet. Dazu gehen wir von einer Startverteilung $q(0)$ mit $q_i(0) := \Pr[X(0) = i]$ für alle $i \in S$ aus und definieren die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $q_i(t)$ im Zustand i zum Zeitpunkt t durch $q_i(t) := \Pr[X(t) = i]$.

Zur Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeiten verwenden wir zum einen die soeben gezeigte Tatsache, dass die Aufenthaltsdauer in jedem Zustand i exponentialverteilt sein muss.

Weiter bezeichnen wir mit ν_{ij} die Übergangsrate vom Zustand i in den Zustand j, sowie $\nu_i := \sum_{j \in S} \nu_{ij}$.

Wir betrachten nun ein kleines Zeitintervall $\mathrm{d}\,t$. Dann ergibt sich die Änderung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit in diesem Zeitintervall als Summe aller „zufließenden" abzüglich aller „abfließenden" Wahrscheinlichkeiten. Für alle Zustände $i \in S$ gilt

$$\underbrace{\mathrm{d}\,q_i(t)}_{\text{Änderung}} = (\underbrace{\sum_j q_j(t) \cdot \nu_{ji}}_{\text{Zufluss}} - \underbrace{q_i(t)\nu_i}_{\text{Abfluss}}) \cdot \mathrm{d}\,t. \tag{14}$$

Das Lösen des Differentialgleichungssystems (14) ist meist sehr aufwendig. Wir werden es im Folgenden durch Betrachtung des Grenzwertes für $t \to \infty$ zu gewöhnlichen linearen Gleichungen vereinfachen.

Definition 154

Zustand j ist von i aus erreichbar, wenn es ein $t \geq 0$ gibt mit
$\Pr[X(t) = j \mid X(0) = i] > 0$.
Eine Markov-Kette, in der je zwei Zustände i und j untereinander erreichbar sind, heißt irreduzibel.

Satz 155

Für irreduzible kontinuierliche Markov-Ketten existieren die Grenzwerte

$$\pi_i = \lim_{t\to\infty} q_i(t)$$

für alle $i \in S$, und ihre Werte sind unabhängig vom Startzustand.

Ohne Beweis.

Wenn für $t \to \infty$ Konvergenz erfolgt, so gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathsf{d}\, q_i(t)}{\mathsf{d}\, t} = 0,$$

da sich $q_i(t)$ für genügend große t „so gut wie nicht mehr" ändert. Diese Gleichung setzen wir in die Differentialgleichungen (14) ein und erhalten

$$0 = \sum_j \pi_j \nu_{ji} - \pi_i \nu_i$$

für alle $i \in S$.

Dieses Gleichungssystem hat immer die triviale Lösung $\pi_i = 0$ für alle $i \in S$. Wir suchen jedoch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, und π muss deshalb zusätzlich die Normierungsbedingung $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$ erfüllen. Bei Markov-Ketten mit endlicher Zustandsmenge S führt dieses Verfahren immer zum Ziel. Wenn S jedoch unendlich ist, gibt es Fälle, in denen $\pi_1 = \pi_2 = \ldots = 0$ die einzige Lösung darstellt und wir somit keine gültige Wahrscheinlichkeitsverteilung erhalten.

3.2 Warteschlangen

Für ein System mit m Servern und einer gemeinsamen Warteschlange hat sich die Bezeichnung $X/Y/m$–Warteschlange eingebürgert. Dabei ersetzt man X und Y durch Buchstaben, die jeweils für eine bestimmte Verteilung stehen. Beispielsweise bezeichnet „D“ eine feste Dauer (von engl. *deterministic*), „M“ die Exponentialverteilung (das M kommt von *memoryless*, dem englischen Wort für gedächtnislos) und „G“ eine beliebige Verteilung (von engl. *general*). X gibt die Verteilung der Zeit zwischen zwei ankommenden Jobs an, während Y für die Verteilung der eigentlichen Bearbeitungszeit eines Jobs auf dem Server steht (ohne Wartezeit).

3.2.1 M/M/1–Warteschlangen

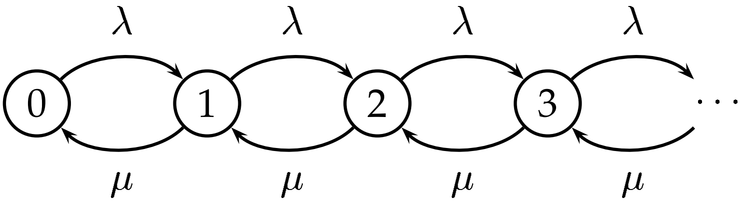

Abbildung: Modellierung einer M/M/1–Warteschlange

Diese Markov-Kette ist irreduzibel, und im Gleichgewichtszustand gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda\pi_{k-1} + \mu\pi_{k+1} - (\lambda+\mu)\pi_k \text{ für alle } k \geq 1 \\ 0 &= \mu\pi_1 - \lambda\pi_0. \end{aligned}$$

Wir definieren die Verkehrsdichte $\rho := \frac{\lambda}{\mu}$ und erhalten:

$$\pi_k = \rho\pi_{k-1} = \ldots = \rho^k\pi_0.$$

Damit:

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \rho^k = \pi_0 \cdot \frac{1}{1-\rho} \quad \Rightarrow \quad \pi_0 = 1 - \rho.$$

Dabei haben wir angenommen, dass $\rho < 1$ ist. Für $\rho \geq 1$ konvergiert das System nicht. Da in diesem Fall $\lambda \geq \mu$ gilt, kommen die Jobs schneller an, als sie abgearbeitet werden können. Intuitiv folgt daraus, dass die Warteschlange immer größer wird.

Für $\rho < 1$ erhalten wir als Endergebnis

$$\pi_k = (1-\rho)\rho^k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$