Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Matthias Baumgart

Wintersemester 2006/2007
Übungsblatt 10
22. Dezember 2006

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

Abgabetermin: 12.01.2007 **vor** *der Vorlesung*

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Für n unterschiedliche Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ mit positiven Gewichten $w_1, \ldots, w_n$, so dass $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ gilt, ist der *gewichtete Median* definiert als ein Element x_k, für das gilt

$$\sum_{x_i < x_k} w_i \leq \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \sum_{x_i > x_k} w_i \leq \frac{1}{2} \, .$$

(a) Zeigen Sie, dass der Median von $x_1, \ldots, x_n$ der gewichtete Median der x_i ist, falls $w_i = 1/n$ für alle i gilt. (Falls n gerade ist, gibt es zwei gewichtete Mediane.)

(b) Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus zur Bestimmung der gewichteten Mediane einer Menge an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Geben Sie ein Verfahren an, das 5 Elemente mit 7 Vergleichen sortiert. (Damit lässt sich offensichtlich auch der Median dieser Elemente mit 7 Vergleichen finden.)

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Angenommen, wir haben eine Algorithmus, der zur Bestimmung des Medians von m Elementen mit $c \cdot m$ Vergleichen auskommt. Zeigen Sie, dass hiermit eine modifizierte Variante des Quicksort Algorithmus zum Sortieren einer Folge mit n Elementen konstruiert werden kann, die maximal $(c+1)n \log_2 n + O(n)$ Vergleiche benötigt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Sei ein Array $A[0..n-1]$ mit n paarweise verschiedenen natürlichen Zahlen gegeben. Ein Paar (i, j) heißt *Inversion* (bezüglich der aufsteigenden Sortierung), wenn $i < j$ und $A[i] > A[j]$ gilt.

Geben Sie einen Algorithmus an, der die Anzahl der Inversionen in einem Array $A[0..n-1]$ in Laufzeit $O(n \log n)$ bestimmt.