
Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

Abgabetermin: 22.12.2006 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (10 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das zweitgrößte Element einer n -elementigen Menge mit $n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$ Vergleichen gefunden werden kann. Geben Sie einen vollständigen formalen Beweis an, dass dies auch eine untere Schranke ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Der Median einer k -elementigen Menge (aus einem total geordneten Universum) ist das $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ -kleinste Element. Seien nun zwei sortierte Mengen mit je n Elementen gegeben (alle $2n$ Elemente seien paarweise verschieden). Zeigen Sie, dass der Median aller $2n$ Elemente in Zeit $O(\log n)$ bestimmt werden kann. Achten Sie darauf, dass in der Rekursion auch Teilmengen mit gerader Kardinalität auftreten können.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sei eine n -elementige Menge M . Wieviele Vergleiche braucht man, um das Minimum *und* das Maximum von M gleichzeitig zu bestimmen? Beweisen Sie eine obere wie auch untere Schranke.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Betrachten Sie folgenden einfachen Algorithmus um das k -kleinste Element einer n -elementigen Menge zu bestimmen. Wir wählen ein Element x und teilen die restlichen Elemente in zwei Mengen, K und G , die die kleineren bzw. größeren Elemente enthalten. Wenn $|K| \geq k$, dann bestimmen wir rekursiv das k -kleinste Element in K , wenn $|K| = k - 1$, dann ist x das gesuchte Element, andernfalls bestimmen wir rekursiv das $k - |K| - 1$ -kleinste Element in G . Wir gehen davon aus, dass alle Ordnungen gleichwahrscheinlich sind, und dass die Menge nur verschiedene Elemente enthält. Sei $C_{n,k}$ die durchschnittliche Anzahl von Vergleichen, die gebraucht werden, um das k -kleinste Element einer n -elementigen Menge mit dieser Methode zu bestimmen. Zeigen Sie, dass $C_{n,k} = O(n)$.