
Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 23. April 2007 vor der Vorlesung

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Seien die Funktionen $h, h^+, f, f^+ : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $h(n) = n^{(-1)^n}$, $f(n) = n + h(n)$ und $h^+(n) = h(n+1)$, $f^+(n) = f(n+1)$. Zeigen Sie:

- i) $h^+(n) \notin O(h(n))$, ii) $f^+(n) \in \Theta(f(n))$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie:

- i) $n^3 \log n \in O(n^4)$, ii) $(\log n)^4 \notin \Omega(n)$.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei Σ^* die Menge aller Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Es bezeichne \circ die Konkatenation von Wörtern.

1. Zeigen Sie, dass die Algebra $\langle \Sigma^*, \circ \rangle$ ein Monoid ist.
2. Geben Sie einen Algorithmus an, der für ein Wort $w \in \Sigma^*$ entscheidet, ob w in dem von der Menge $X = \{aaa, bb\}$ erzeugten Untermonoid U von $\langle \Sigma^*, \circ \rangle$ enthalten ist.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir betrachten wieder das Monoid $\langle \{a, b, c\}^*, \circ \rangle$. Eine Relation R über $\{a, b, c\}^*$ bestehe nur aus dem einen Paar (ϵ, ab) mit dem leeren Wort ϵ . Die algebraische Hülle R^a von R ist definiert als $R^a = \{(x \circ u \circ y, x \circ v \circ y); (u, v) \in R \text{ und } x, y \in \{a, b, c\}^*\}$. Die reflexive und transitive Hülle von R^a bezeichnen wir mit $(R^a)^{rt}$ und schreiben $x \Rightarrow_{R^a} y$ für $(x, y) \in (R^a)^{rt}$. Beweisen Sie:

- i) $\epsilon \Rightarrow_{R^a} abaabb$, ii) Es gilt nicht $a \Rightarrow_{R^a} abaabb$.

Hinweis: Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.

Vorbereitung 1

Betrachten Sie eine Phrasenstrukturgrammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$, deren Regeln alle die Form $A \rightarrow w$ mit $w \in (V \cup \Sigma)^*$ besitzen. Beweisen Sie die folgende Aussage für alle $u, v \in (V \cup \Sigma)^+$, $a \in \Sigma$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

Falls $A \rightarrow_G uv \rightarrow_G^* a^n$ gilt, dann gibt es $p, q \in \mathbb{N}_0$ mit $p + q = n$, so dass $u \rightarrow_G^* a^p$ und $v \rightarrow_G^* a^q$ gilt.

Vorbereitung 2

Betrachten Sie die Phrasenstrukturgrammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \rightarrow ab, S \rightarrow aSb\}, S)$.

1. Geben Sie $L(G)$ an.
2. Geben Sie eine Grammatik $G' = (V', \Sigma', P', S')$ mit $L(G') = L(G)$ an, deren Regeln die Form $A \rightarrow xy$ oder $A \rightarrow xBy$ haben, wobei $A, B \in V'$ Nichtterminale und $x, y \in \Sigma'$ Terminale seien mit $|xy| \leq 1$.
3. Beweisen Sie $L(G') = L(G)$.

Tutoraufgabe 1

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Phrasenstrukturgrammatik, so dass für alle Regeln $\alpha \rightarrow \beta \in P$ gilt $\alpha \in V$ und $\beta \in \Sigma^* \cup \Sigma^*V$. Beweisen Sie, dass $L(G)$ regulär ist.

Tutoraufgabe 2

Zeigen Sie, dass jede (längen-)monotone Phrasenstrukturgrammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextsensitive Sprache $L(G)$ erzeugt.