Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2007
Übungsblatt 7
4. Juni 2007

Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 11. Juni 2007 **vor** *der Vorlesung*

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Beweisen Sie mithilfe von Ogden's Lemma, dass die folgenden Sprachen L_1, L_2 nicht kontextfrei sind:

1. $L_1 = \{a^i b^j a^k\,;\, i,j,k \in \mathbb{N}_0,\ j = \max(i,k)\}$,
2. $L_2 = \{a^i b^j a^k\,;\ i,j,k \in \mathbb{N}_0,\ i < j < k\}$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma$ definieren wir

$$MAX(L) := \{x \in L\,;\,(\forall y \in \Sigma^*)[xy \in L \Rightarrow y = \epsilon]\}$$

Zeigen Sie, dass die Klasse der kontextfreien Sprachen nicht abgeschlossen ist unter der Operation MAX.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie: Die Sprache $L = \{w \in \{0,1\}^*\,;\, w$ enthält gleich viele Nullen und Einsen$\}$ ist deterministisch kontextfrei.
2. Die Sprache $L = \{a^n b^n\,;\, n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{a^n b^{2n}\,;\, n \in \mathbb{N}_0\}$ ist zwar kontextfrei, sie ist aber keine deterministisch kontextfreie Sprache. Beweisen Sie dies durch Widerspruch, indem Sie annehmen, dass es einen DPDA M gibt, der L erkennt, und dann mit modifizierten Kopien M' und M'' von M einen DPDA $\tilde{M}$ konstruieren, der die Sprache $\{a^n b^n c^n\,;\, n \in \mathbb{N}_0\}$ erkennt.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie: Zu jeder kontextfreien Sprache L mit $\epsilon \notin L$ gibt es einen Kellerautomaten, der L mit Endzuständen akzeptiert und keine ϵ-Übergänge benötigt, d. h., der in jedem Schritt ein Eingabezeichen liest.

Hinweis: *Die als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Sei $L = \{a^i b^j c^k \,;\, i \neq j \ \vee\ j \neq k\}$.

1. Geben Sie einen Kellerautomaten A an, der die Sprache L mit leerem Keller akzeptiert.
2. Wandeln Sie den erhaltenen Kellerautomaten A für die Sprache L systematisch in eine kontextfreie Grammatik um.

Vorbereitung 2

Ein 2-Kellerautomat $(Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, Z_0, Z_0', F)$ ist ein Kellerautomat, der über einen zweiten Keller verfügt (der mit Z_0' initialisiert wird). Die Übergangsfunktion

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Delta \times \Delta \to \mathcal{P}_e(Q \times \Delta^* \times \Delta^*)$$

beschreibt die Vorgehensweise des 2-KA wie folgt ($\mathcal{P}_e$ bezeichnet die Menge aller endlichen Teilmengen). Liest der 2-KA im Zustand q die Eingabe a (auch $a = \epsilon$ ist möglich), sind Z_1, Z_2 die obersten Zeichen der beiden Keller und gilt $(q', \alpha_1, \alpha_2) \in \delta(q, a, Z_1, Z_2)$, dann kann der 2-KA in den Zustand q' übergehen und hierbei Z_1 durch α_1 und Z_2 durch α_2 ersetzen.

Zeigen Sie: Jede 1-Band-Turingmaschine kann durch einen 2-Kellerautomaten sozusagen simuliert werden.

Tutoraufgabe 1

Sei Σ ein Alphabet. Geben Sie für die kontextsensitive Sprache $L = \{ww \,;\, w \in \Sigma^*\}$ einen linear beschränkten Automaten M an, der L akzeptiert.

Tutoraufgabe 2

Geben Sie eine Turing-Maschine an, die für $n > 0$, falls das Band mit $\mathrm{bin}(n)\#$ initialisiert wird, die Funktion $f(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$ berechnet (das Band soll nach Terminierung mit $\mathrm{bin}(\lfloor \log_2 n \rfloor)\#$ beginnen).