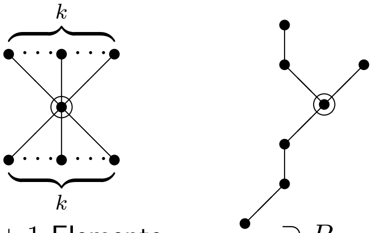
4. Schönhage/Paterson/Pippenger-Median-Algorithmus

Definition 81

Sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. P_k ist die folgende partielle Ordnung:

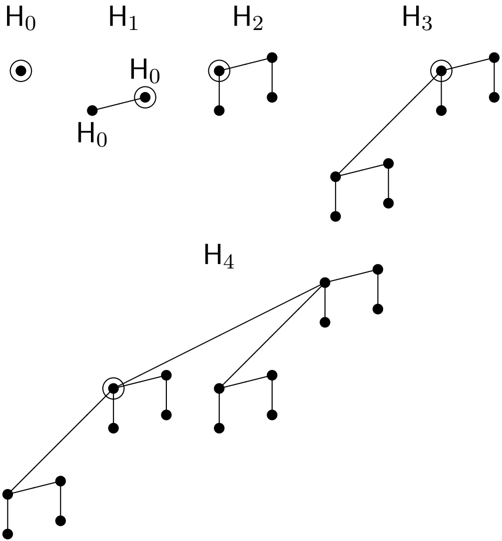


$2k+1$ Elemente $\qquad \supseteq P_3$

Also: Spezielle Binomialbäume mit „Zentrum“.

Definition 82

1. Der Baum H_0 besteht aus einem Knoten, und dieser ist auch das Zentrum.
2. $H_{2h}(h > 0)$ besteht aus zwei H_{2h-1}, deren Zentren durch eine neue Kante verbunden sind. Das Zentrum des H_{2h} ist das kleinere der beiden Zentren der H_{2h-1}.
3. $H_{2h+1}(h \geq 0)$ besteht aus zwei H_{2h}, deren Zentren durch eine neue Kante verbunden sind, sein Zentrum ist das größere dieser beiden Zentren.


H_0
H_1
H_2
H_3
H_0
H_0
H_4

Lemma 83 (Zerlegungslemma)

a) *H_h hat 2^h Knoten, es werden $2^h - 1$ Vergleiche benötigt, um H_h zu konstruieren.*

b) *H_{2h} kann zerlegt werden in*

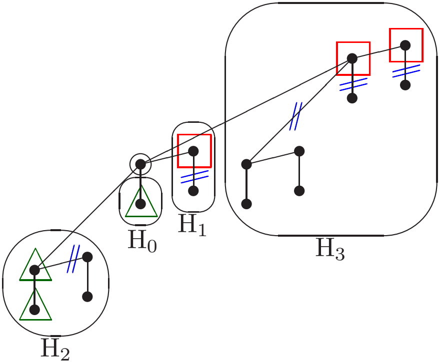
- *sein Zentrum*
- *eine Menge $\{H_1, H_3, \ldots, H_{2h-1}\}$ von disjunkten Teilbäumen, deren Zentren alle größer sind als das Zentrum von H_{2h}.*
- *eine Menge $\{H_0, H_2, H_4, \ldots, H_{2h-2}\}$ von disjunkten Teilbäumen mit Zentren kleiner als das von H_{2h}.*

Lemma 83 (Zerlegungslemma)

c) *H_{2k+1} kann so zerlegt werden, dass die Zusammenhangskomponente des Zentrums genau 2^k Knoten $\geq$ dem Zentrum enthält, indem höchstens $2^{k+1}-1$ Kanten entfernt werden.*
H_{2k} kann so zerlegt werden, dass die Zusammenhangskomponente des Zentrums genau 2^k Knoten enthält, die alle $\leq$ dem Zentrum sind, indem höchstens 2^k-1 Kanten entfernt werden.

d) *Falls $k \leq 2^h - 1$, dann kann H_{2h} so zerlegt werden, dass die Zusammenhangskomponente des Zentrums genau $2k+1$ Elemente enthält, von denen k größer und k kleiner als das Zentrum sind ($\Rightarrow P_k$).*
Dazu genügt es, höchstens $3k+2h$ Kanten zu entfernen. Die restlichen Zusammenhangskomponenten sind wieder H_i's.

Zerlegungslemma



$>$ ⊙ (Zentrum)

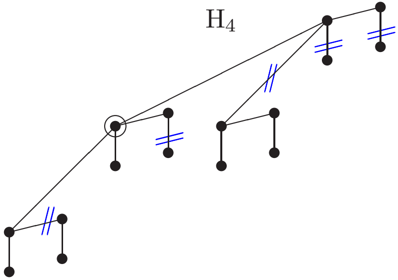
$<$ ⊙ (Zentrum)

// Abtrennung von Wildwuchs

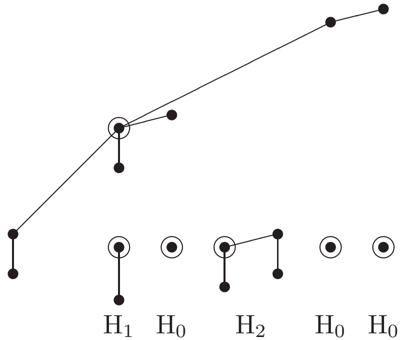
Bemerkung: Bei jedem Konstruktionsschritt wird ein Vergleich durchgeführt, um zu bestimmen, welcher der beiden Teilbäume das kleinere Zentrum hat. Im Algorithmus von Schönhage, Paterson und Pippenger werden aus Teilstücken H_r größere Bäume H_{r+1} zusammengebaut, wodurch schrittweise eine partielle Ordnung auf den Eingabewerten bestimmt wird. Wurde ein Baum H_{2h} hinreichender Größe hergestellt, so wird er durch Zerlegung in einen Baum umgewandelt, der nur noch sein altes Zentrum sowie k darüberliegende und k darunterliegende Elemente enthält, wobei $k \leq 2^h - 1$.

Beispiel 84

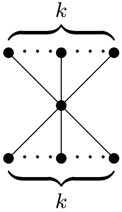
In diesem Beispiel wollen wir H_4 zerlegen und wählen $k = 3$:



Um einen H_4 derart zu zerlegen, müssen wir 5 Kanten aufbrechen. Dabei werden drei H_0, ein H_1 sowie ein H_2 abgespalten.



Übrig bleibt die gewünschte Struktur mit k Knoten über dem Zentrum und k unter dem Zentrum, wodurch eine partielle Ordnung auf $2k+1$ Eingabewerten bestimmt wurde:



$2k+1$ Elemente

Die bei der Zerlegung angefallenen Reststücke werden beim Aufbau weiterer Bäume benutzt. So geht das bereits angesammelte Wissen über die Ordnung der Elemente nicht verloren.

Beweis von a):

Wir beweisen nun die Teile a) bis d) des Zerlegungslemmas.

Lemma 85

H_r hat 2^r Knoten, es werden $2^r - 1$ Vergleiche benötigt, um H_r aufzubauen.

Beweis:

In jedem der r Konstruktionsschritte wird die Anzahl der Knoten verdoppelt. Da wir mit einem Knoten beginnen, hat H_r folglich 2^r Knoten. Die Anzahl der notwendigen Vergleiche C_r unterliegt folgender Rekursionsgleichung ($r \geq 1$):

$$C_r = 1 + 2C_{r-1} \text{ und } C_0 = 0\,.$$

Damit folgt sofort $C_r = 2^r - 1$. $\square$

Beweis von b):

Lemma 86

H_r kann in folgende disjunkte Bereiche unterteilt werden:

- *sein Zentrum,*
- *eine Reihe $H_1, H_3, \ldots, H_{r-1}$ (r gerade) bzw. $\ldots, H_{r-2}$ (r ungerade) von Unterbäumen, deren Zentren über dem von H_r liegen,*
- *eine Reihe $H_0, H_2, \ldots, H_{r-2}$ (r gerade) bzw. $\ldots, H_{r-1}$ (r ungerade) von Unterbäumen, deren Zentren unter dem von H_r liegen.*

Beweis von b):

Beweis:

Durch Induktion über r.

Induktionsanfang: für H_0 gilt die Behauptung.

Induktionsannahme: die Behauptung gelte für H_{r-1}.

Beweis von b):

Beweis:

1. Sei $r = 2h, h > 0$.
   H_{2h} besteht aus zwei H_{2h-1}, wobei das kleinere der beiden alten Zentren das neue Zentrum z bildet. Wende auf den H_{2h-1}, der z enthält, die Induktionsannahme an. Wir können diesen Unterbaum also in z sowie $H_1, H_3, \ldots, H_{2h-3}$ (Zentren über z) und $H_0, H_2, \ldots, H_{2h-2}$ (Zentren unter z) partitionieren. Zusammen mit dem H_{2h-1}, dessen Zentrum über z liegt, ergibt sich die Induktionsbehauptung für H_{2h}.

Beweis von b):

Beweis:

2. Sei $r = 2h + 1$, $h \geq 0$. H_{2h+1} besteht aus zwei H_{2h}, wobei das größere der beiden alten Zentren das neue Zentrum z bildet. Wende auf den H_{2h}, der z enthält, die Induktionsannahme an. Wir können diesen Unterbaum also in z sowie $H_1, H_3, \ldots, H_{2h-1}$ (Zentren über z) und $H_0, H_2, \ldots, H_{2h-2}$ (Zentren unter z) partitionieren. Zusammen mit dem H_{2h}, dessen Zentrum unter z liegt, ergibt sich die Induktionsbehauptung für H_{2h+1}.

$\square$

Beweis von c):

Wir bezeichnen im Folgenden mit H_{2h}^{-} den Baum, der entsteht, wenn wir H_{2h} so zerlegen, dass alle Elemente oberhalb des Zentrums wegfallen. Mit H_{2h+1}^{+} bezeichnen wir den Baum, der entsteht, wenn wir H_{2h+1} so zerlegen, dass alle Elemente unterhalb des Zentrums wegfallen.

Lemma 87

H_{2h}^{-} und H_{2h+1}^{+} haben jeweils 2^h Knoten. Bei der Herstellung aus H_{2h} bzw. H_{2h+1} werden $2^h - 1$ bzw. $2^{h+1} - 1$ Kanten aufgebrochen. Die wegfallenden Teile haben die Form H_s, $s < 2h$ bzw. $s < 2h + 1$.

Beweis:

Durch Induktion über r.

Induktionsanfang: für H_0 und H_1 gilt die Behauptung.

Induktionsannahme: die Behauptung gilt für alle H_p, $p < r$.

1. Sei $r = 2h$, $h > 0$. Wir betrachten die Partitionierung von H_{2h} mit Zentrum z wie in Lemma 86. Die Unterbäume H_1, H_3, ..., H_{2h-1} haben ihre Zentren oberhalb von z. Wir trennen sie von H_{2h}, indem wir h Kanten aufbrechen. Die abgetrennten Teile haben offensichtlich die Form H_s, $s < 2h$. Bei den Unterbäumen H_0, H_2, ..., H_{2h-2}, mit Zentren unterhalb von z, wenden wir jeweils die Induktionsannahme an, d.h. wir erzeugen H_0^-, H_2^-, ..., H_{2h-2}^-. Als Ergebnis erhalten wir H_{2h}^-.

Beweis (Forts.):

Damit gilt für die Zahl der aufzubrechenden Kanten $K^-(2h)$ zur Herstellung von H_{2h}^-:

$$K^-(2h) = h + \sum_{i=0}^{h-1} K^-(2i) \stackrel{I.A.}{=} h + \sum_{i=0}^{h-1}(2^i - 1) = \sum_{i=0}^{h-1} 2^i = 2^h - 1.$$

Für die Zahl $E^-(2h)$ der Elemente in H_{2h}^- gilt:

$$E^-(2h) = 1 + \sum_{i=0}^{h-1} E^-(2i) \stackrel{I.A.}{=} 1 + \sum_{i=0}^{h-1} 2^i = 1 + \underbrace{\sum_{i=1}^{h} 2^{i-1}}_{2^h-1} = 2^h.$$

Beweis (Forts.):

2. Sei $r = 2h + 1$, $h > 0$. Wir betrachten die Partitionierung von H_{2h+1} mit Zentrum z wie in Lemma 86. Die Unterbäume H_0, H_2, ..., H_{2h} haben ihre Zentren unterhalb von z. Wir trennen sie von H_{2h+1}, indem wir $h + 1$ Kanten aufbrechen. Die abgetrennten Teile haben offensichtlich die Form H_s, $s < 2h + 1$. Bei den Unterbäumen H_1, H_3, ..., H_{2h-1}, mit Zentren oberhalb von z, wenden wir jeweils die Induktionsannahme an, d.h. wir erzeugen H_1^+, H_3^+, ..., H_{2h-1}^+. Als Ergebnis erhalten wir H_{2h+1}^+. Damit gilt für die Zahl der aufzubrechenden Kanten $K^+(2h + 1)$ zur Herstellung von H_{2h+1}^+:

Beweis (Forts.):

$$
\begin{aligned}
K^+(2h+1) =& h+1+\sum_{i=1}^{h} K^+(2(i-1)+1) \\
\stackrel{I.A.}{=}& h+1+\sum_{i=1}^{h}(2^i-1) = 1+\sum_{i=1}^{h} 2^i \\
=& 1+\underbrace{\sum_{i=1}^{h+1} 2^{i-1}}_{2^{h+1}-1} -1 = 2^{h+1}-1.
\end{aligned}
$$

Für die Zahl $E^+(2h+1)$ der Elemente in H^+_{2h+1} gilt:

$$
E^+(2h+1) = 1+\sum_{i=1}^{h} E^+(2(i-1)+1) \stackrel{I.A.}{=} 1+\underbrace{\sum_{i=1}^{h} 2^{i-1}}_{2^h-1} = 2^h.
$$

□

Beweis von d):

Lemma 88

Falls $k \leq 2^h - 1$, dann kann H_{2h} so zerlegt werden, dass die Komponente des Zentrums genau $2k+1$ Elemente enthält, k davon über und k unter dem Zentrum. Dazu müssen $\leq 3k + 2h$ Kanten entfernt werden. Die entfernten Teile sind von der Form H_s, $s < 2h$.

Beweis:

Betrachte die Binärdarstellung von $k = k_0 2^0 + k_1 2^1 + \cdots + k_{h-1} 2^{h-1}$ und die Partitionierung von H_{2h} mit Zentrum z wie in Lemma 86.

Beweis (Forts.):

Für jedes i mit $k_i = 1$, betrachte H_{2i+1} aus der Sequenz H_1, H_3, $\ldots$, H_{2h-1} von Unterbäumen, deren Zentren oberhalb von z liegen, und schneide alle Elemente aus H_{2i+1}, die kleiner als sein Zentrum sind (bilde also H^+_{2i+1}). Dazu müssen höchstens $2k$ Kanten aufgebrochen werden, denn jedes $k_i = 1$ steht für 2^i in k, kostet aber nach Lemma 87 $K^+(2i+1) = 2^{i+1} - 1$ Kanten, also:

$$\sum_{i=0}^{h-1} k_i K^+(2i+1) \leq 2k\,.$$

Für jedes i mit $k_i = 0$, schneide H_{2i+1} ganz weg. Dabei werden $\leq h$ Kanten aufgebrochen. Genau k Elemente oberhalb z bleiben zurück, da jedes $k_i = 1$ für 2^i in k steht, und ein H^+_{2i+1} genau $E^+(2i+1) = 2^i$ Elemente enthält, also:

$$\sum_{i=0}^{h-1} k_i E^+(2i+1) = k\,.$$

Beweis (Forts.):

Für jedes i mit $k_i = 1$, betrachte H_{2i} aus der Sequenz H_0, H_2, $\ldots$, H_{2h-2} von Unterbäumen, deren Zentren unterhalb von z liegen, und schneide alle Elemente aus H_{2i}, die größer als sein Zentrum sind (bilde also H_{2i}^-). Dazu müssen höchstens $k-1$ Kanten aufgebrochen werden, denn jedes $k_i = 1$ steht für 2^i in k und kostet uns nach Lemma 87 $K^-(2i) = 2^i - 1$ Kanten, also:

$$\sum_{i=0}^{h-1} k_i(2^i - 1) \leq k - 1\,.$$

Für jedes i mit $k_i = 0$, schneide H_{2i} ganz weg. Dabei werden höchstens h Kanten aufgebrochen. Genau k Elemente unterhalb von z bleiben zurück, da jedes $k_i = 1$ für 2^i in k steht, und ein H_{2i}^- genau $E^-(2i) = 2^i$ Elemente enthält, also:

$$\sum_{i=0}^{h-1} k_i E^-(2i) = k\,.$$

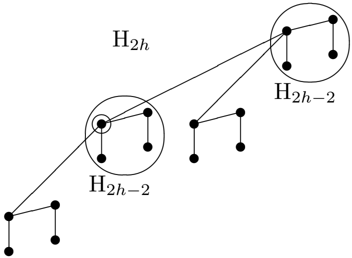
Beweis (Forts.):

Damit ergibt sich für die Gesamtanzahl aufzubrechender Kanten eine obere Schranke von $3k + 2h$. Lemma 87 liefert uns darüber hinaus die gewünschte Aussage über die Form der abgetrennten Teile. $\square$

Beweis von d):

Betrachte H_{2h}.

- „größer“: $H_{2h-1}, H_{2h-3}, \ldots, H_1$
- „kleiner“: $H_{2h-2}, H_{2h-4}, \ldots, H_0$



$U(h) :=$ Anzahl der Elemente in $H_{2h} \geq$ Zentrum:
$U(h) = 2U(h-1) = 2^h;\ U(0) = 1$
$D(h) :=$ Anzahl der Elemente in $H_{2h} \leq$ Zentrum:
$D(h) = 2D(h-1) = 2^h;\ D(0) = 1$

Beweis von d):

Anzahl der Kanten, die entfernt werden müssen:

$$\left.\begin{aligned} C_u(h) &\le 2 + 2C_u(h-1)\\ &= 2 + 4 + 2^3 + \ldots + 2^h\\ &= 2^{h+1} - 2\\ C_d(h) &\le 1 + 2C_d(h-1)\\ &= 2^h - 1 \end{aligned}\right\} C_H \le 2^{h+1} - 2 + 2^h - 1 \approx 3 \cdot 2^h$$