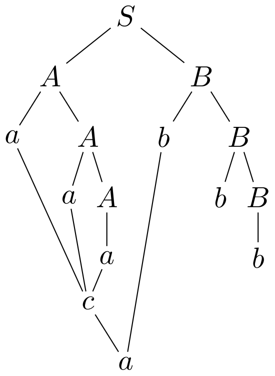
4.2 Ableitungsgraph und Ableitungsbaum

Grammatik:

$$
\begin{array}{rcl}
S & \rightarrow & AB \\
A & \rightarrow & aA \\
A & \rightarrow & a \\
B & \rightarrow & bB \\
B & \rightarrow & b \\
aaa & \rightarrow & c \\
cb & \rightarrow & a
\end{array}
$$

Beispiel:

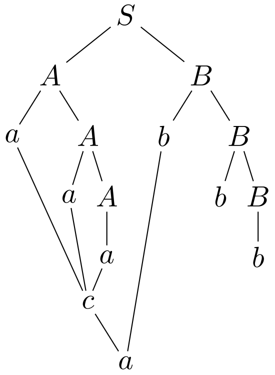


Die Terminale ohne Kante nach unten entsprechen, von links nach rechts gelesen, dem durch den Ableitungsgraphen dargestellten Wort.

Grammatik:

$$
\begin{array}{rcl}
S & \rightarrow & AB \\
A & \rightarrow & aA \\
A & \rightarrow & a \\
B & \rightarrow & bB \\
B & \rightarrow & b \\
aaa & \rightarrow & c \\
cb & \rightarrow & a
\end{array}
$$

Beispiel:



Dem Ableitungsgraph entspricht z.B. die Ableitung

$$
\begin{array}{rcl}
S & \rightarrow & AB \rightarrow aAB \rightarrow aAbB \rightarrow aaAbB \rightarrow aaAbbB \rightarrow \\
 & \rightarrow & aaabbB \rightarrow aaabbb \rightarrow cbbb \rightarrow abb
\end{array}
$$

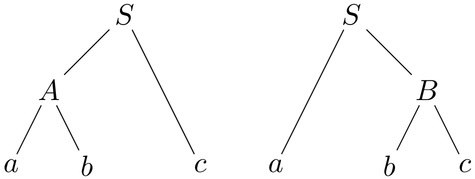
Beobachtung:
Bei kontextfreien Sprachen sind die Ableitungsgraphen immer Bäume.

Beispiel 60

Grammatik:

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow aB \\
S &\rightarrow Ac \\
A &\rightarrow ab \\
B &\rightarrow bc
\end{aligned}
$$

Ableitungsbäume:



Für das Wort abc gibt es zwei verschiedene Ableitungsbäume.

Definition 61

- Eine Ableitung

$$S = w^{(0)} \to w^{(1)} \to \cdots \to w^{(n)} = w$$

  eines Wortes w heißt Linksableitung, wenn für jede Anwendung einer Produktion $\alpha \to \beta$ auf $w^{(i)} = x\alpha z$ gilt, dass sich keine Regel der Grammatik auf ein echtes Präfix von $x\alpha$ anwenden lässt.

- Eine Grammatik heißt eindeutig, wenn es für jedes Wort $w \in L(G)$ genau eine Linksableitung gibt. Nicht eindeutige Grammatiken nennt man auch mehrdeutig.

- Eine Sprache L heißt eindeutig, wenn es für L eine eindeutige Grammatik gibt. Ansonsten heißt L mehrdeutig.

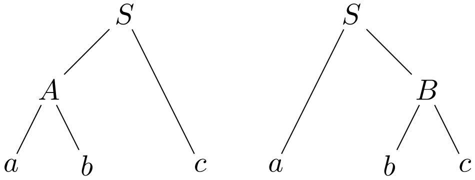
Bemerkung: Eindeutigkeit wird meist für kontextfreie (und reguläre) Grammatiken betrachtet, ist aber allgemeiner definiert.

Beispiel 62

Grammatik:

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow aB \\
S &\rightarrow Ac \\
A &\rightarrow ab \\
B &\rightarrow bc
\end{aligned}
$$

Ableitungsbäume:



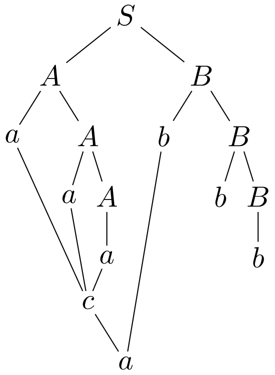
Beide Ableitungsbäume für das Wort abc entsprechen Linksableitungen.

Beispiel 63

Grammatik:

$$
\begin{array}{rcl}
S & \rightarrow & AB \\
A & \rightarrow & aA \\
A & \rightarrow & a \\
B & \rightarrow & bB \\
B & \rightarrow & b \\
aaa & \rightarrow & c \\
cb & \rightarrow & a
\end{array}
$$

Ableitung:



Eine Linksableitung ist

$$
\begin{array}{rcl}
S & \rightarrow & AB \rightarrow aAB \rightarrow aaAB \rightarrow aaaB \rightarrow cB \rightarrow \\
 & \rightarrow & cbB \rightarrow aB \rightarrow abB \rightarrow abb
\end{array}
$$

Beispiel 63

Grammatik:

$$
\begin{array}{rcl}
S & \rightarrow & AB \\
A & \rightarrow & aA \\
A & \rightarrow & a \\
B & \rightarrow & bB \\
B & \rightarrow & b \\
aaa & \rightarrow & c \\
cb & \rightarrow & a
\end{array}
$$

Eine andere Linksableitung für abb ist

$$S \rightarrow AB \rightarrow aB \rightarrow abB \rightarrow abb\,.$$

Beispiel 63

Grammatik:

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow AB \\
A &\rightarrow aA \\
A &\rightarrow a \\
B &\rightarrow bB \\
B &\rightarrow b \\
aaa &\rightarrow c \\
cb &\rightarrow a
\end{aligned}
$$

Die Grammatik ist also mehrdeutig.

5. Eigenschaften regulärer Automaten und Sprachen

5.1 Äquivalenz von NFA und DFA

Satz 64

Für jede von einem nichtdeterministischen endlichen Automaten akzeptierte Sprache L gibt es auch einen deterministischen endlichen Automaten M mit

$$L = L(M) \, .$$

Beweis:

Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein NFA.

Definiere

1. $M' := (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$
2. $Q' := \mathcal{P}(Q) \qquad (\mathcal{P}(Q) = 2^Q$ Potenzmenge von $Q)$
3. $\delta'(Q'', a) := \bigcup_{q' \in Q''} \delta(q', a)$ für alle $Q'' \in Q'$, $a \in \Sigma$
4. $q_0' := \{q_0\}$
5. $F' := \{Q'' \subseteq Q;\ Q'' \cap F \neq \emptyset\}$

Also

NFA N:	Q	Σ	δ	q_0	F
DFA M':	2^Q	Σ	δ'	q_0'	F'

Beweis (Forts.):

Es gilt:

$$\begin{aligned} w \in L(N) \quad &\Leftrightarrow \quad \hat{\delta}(S, w) \cap F \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \quad \widehat{\delta'}(q'_0, w) \in F' \\ &\Leftrightarrow \quad w \in L(M'). \end{aligned}$$

□

Der zugehörige Algorithmus zur Überführung eines NFA in einen DFA heißt Teilmengenkonstruktion, Potenzmengenkonstruktion oder Myhill-Konstruktion.