Algorithmen für die Speicherhierarchie

Sortieren und Permutieren: Obere und untere Schranken [Aggarwal, Vitter 1988]

Riko Jacob

Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

Vorlesung Sommersemester 2009

Analyse k-Wege MergeSort

klassisches Divide-and-Conquer

Theorem

MergeSort nutzt $\mathcal{O}\left(\frac{N}{B}\log_{\frac{M}{B}}\frac{N}{M}\right)$ *I/Os*

	I/Os	# Runs
Basis: Je M Elemente Laden; Sortieren; Speichern;	$\mathcal{O}(N/B)$	N/M
Verschmelzen: je $k = M/B - 1$ sortierte Listen	$\mathcal{O}(N/B)$	$\times 1/k$

Verschmelzungstiefe: $\mathcal{O}\left(\log_{\frac{M}{B}} N/M\right)$

I/O-Bedarf Sortieren

Theorem

Sortieren benötigt höchstens

$$\mathcal{O}\left(\frac{N}{B}\log_{\frac{M}{B}}\frac{N}{M}\right)$$

I/O-Operationen (für $N > M^2/B$).

Beispiel

$M = 50\text{Mega}$, $B = 1.000$, $N = 200\text{Giga}$:
$M/B = 50.000$, $N/M = 40.000$;
einmal scannen um Runs zu erzeugen, einmal Verschmelzen

Geht es besser?

Sortieren: unter Schranke

Annahmen

- Vergleichsbasierter Algorithmus
- Elemente können nur bewegt, kopiert, gelöscht, und verglichen werden
- Eingabe in den ersten N/B Blöcken der Platte
- $M \geq 2B$

Gegenspieler

- Gegenspieler gibt Antworten auf Vergleiche
- Konsistenz: Wiederholung, Transitivität
- “Reagiert” auf Aktivitäten des Algorithmus
- Annahme: In jedem Schritt fragt der Algorithmus alle Vergleiche zwischen Elementen die momentan in M sind.

unter Schranke: Strategie des Gegenspielers

Maß für den bisherigen Erfolg des Algorithmus

S_ℓ Menge von Permutationen, die nach ℓ I/O-Operationen noch konsistent mit bisherigen Antworten ist
(weitere Antworten verkleinern diese Menge)

Strategie des Gegenspielers

Maximiere in jedem Schritt die Größe von S_ℓ (Kardinalität)

Qualität dieser Strategie

Wenn der Gegenspieler X mögliche Antworten hat, dann gibt es eine, die mindestens $|S_\ell|/X$ Permutationen weiterhin erlaubt.
(Großes X schwächt dieses Argument für den Gegenspieler)

Zählen

Definition von X, Abhängig von I/O-Operation

X ist die maximale Anzahl von verschiedenen Antworten:
Auf wieviele Arten können die neuen Elemente in die bisherige lineare Ordnung eingefügt werden?

Operation	lese frischen Block*	lese Block	schreibe Block
X	$\binom{M}{B}B!$	$\binom{M}{B}$	1

$*$: höchstens N/B solche Operationen

$|S_0| = N!$

$$|S_\ell| \geq \frac{N!}{\binom{M}{B}^\ell (B!)^{\frac{N}{B}}}$$

Frühestens fertig falls

$$1 \geq \frac{N!}{\binom{M}{B}^\ell (B!)^{\frac{N}{B}}}$$

Auflösen nach ℓ

$$\binom{M}{B}^{\ell} (B!)^{\frac{N}{B}} \geq N!$$

$$\ell \log \binom{M}{B} + \frac{N}{B} \log(B!) \geq \log(N!)$$

$$3\ell B \log(M/B) + N \log B \geq N(\log N - \log e)$$

$$3\ell \geq \frac{N(\log N - \log e - \log B)}{B \log(M/B)}$$

Lemma

1. $\log(x!) \geq x(\log x - \log e)$
2. $\log(x!) \leq x \log x$
3. $\log \binom{x}{y} \leq 3y \log \frac{x}{y}$ für $x \geq 2y$

Resultat

$$\ell = \Omega\left(\frac{N}{B} \log_{\frac{M}{B}} \frac{N}{B}\right)$$

Lemma (Stirling)

Lemma

1. $\log(x!) \geq x(\log x - \log e)$
2. $\log(x!) \leq x \log x$
3. $\log \binom{x}{y} \leq 3y \log \frac{x}{y}$ für $x \geq 2y$

Stirling [Forster, Analysis 1]

$$x! > \sqrt{2\pi x} \cdot (x/e)^x$$

Beweis

1. $\log(x!) \geq \log \sqrt{2\pi x} + x(\log x - \log e)$
2. $\log(x!) \leq \log(x^x) = x \log x$
3. $\log \binom{x}{y} \leq \log \frac{x^y}{(y/e)^y} = y(\log(x/y) + \log e)$

Zusammenfassung Sortieren

Definiere

$n = N/B$
$m = M/B$

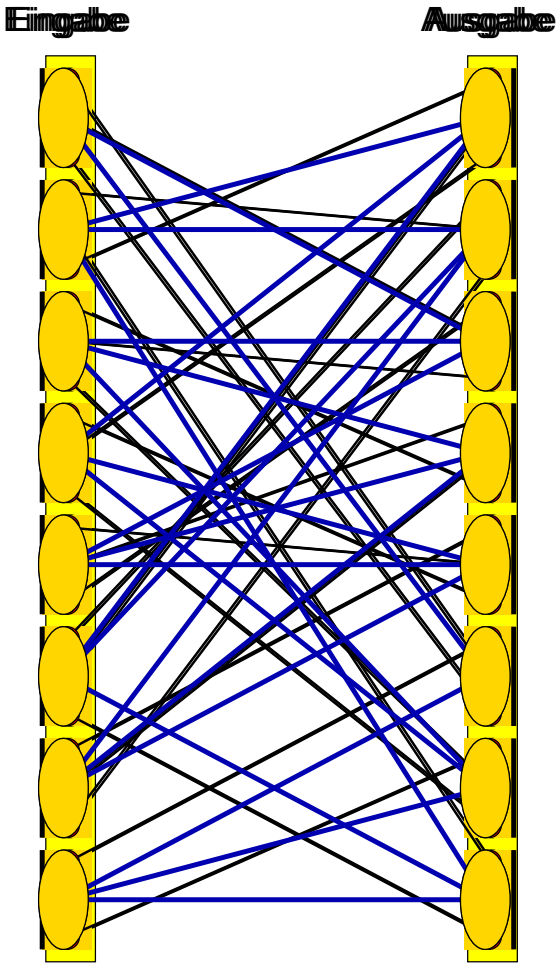
Benutze

$$1 + \log_{\frac{M}{B}}(x) = \log_{\frac{M}{B}}(x\frac{M}{B})$$

Komplexität Sortieren ($N > M$)

$$\Theta(N/B \log_{M/B}(N/B))$$
$$= \Theta(n \log_m(n))$$
$$=: \text{sort}(N)$$

Aufgabe Permutieren



- $\mathcal{O}(N)$ CPU-Operationen
- $\mathcal{O}(N)$ I/O-Operationen
- $$\mathcal{O}\left(\frac{N}{B}\log_{\frac{M}{B}}\frac{N}{M}\right)$$ I/O-Ops.

  durch MergeSort

Beispiel

$M = 50$Mega, $B = 1.000$, $N = 200$Giga:
$M/B = 50.000$, $N/M = 40.000$;
zweimal scannen
Faktor 500.

Untere Schranke Permutieren

Theorem ([Aggarwal, Vitter 1988])

Angenommen, Elemente werden nur
kopiert, bewegt, oder gelöscht,
dann gibt es eine Permutation die

$$\Omega\left(\min\left\{N, \frac{N}{B}\log_{\frac{M}{B}}\frac{N}{M}\right\}\right)$$

I/O-Operationen benötigt.

Eine zufällig gewählte Permutation (uniform) benötigt mit hoher Wahrscheinlichkeit diese Anzahl von I/O-Operationen

Kopieren und Löschen unnötig

Programmanalyse

Die betrachteten Programme sind deterministisch. Daher ist klar, wann und wie ein geschriebenes Element wieder verwendet wird.

Transformation

Arbeite nur mit der einen Kopie eines Elements, die letztendlich in der Ausgabe verwendet wird.
$\Rightarrow$ kein kopieren oder löschen.

Spur

Falls nur bewegt wird, beschreiben Hauptspeicher und Festplatte genau eine Permutation der Elemente.

Beweis: untere Schranke Permutieren

Normalisierung

Hauptspeicher in endgültiger (relativer) Reihenfolge

$$S_\ell := \text{Anzahl der Permutationen die mit } \ell \text{ I/O-Operationen erreicht werden können}$$

Anzahl X neuer Permutationen

Operation	lese frischen Block*	lese Block	schreibe Block
X	$N\binom{M}{B}B!$	$N\binom{M}{B}$	$N \cdot B$

untere Schranke

$$\left(N\binom{M}{B}\right)^\ell B!^{\frac{N}{B}} \geq N!$$

Auflösen nach ℓ

$$\left(\binom{M}{B} \cdot N\right)^{\ell} (B!)^{\frac{N}{B}} \geq N!$$

$$\ell \log\left(\binom{M}{B} N\right) + \frac{N}{B} \log(B!) \geq \log(N!)$$

$$3\ell\,(B \log(M/B) + \log N) + N \log B \geq N(\log N - \log e)$$

$$3\ell \geq \frac{N(\log N - \log e - \log B)}{B \log(M/B) + \log N}$$

$B \log(M/B) \geq \log N$

$$3\ell \geq \frac{N(\log N - \log e - \log B)}{2B \log(M/B)}$$

$$\ell = \Omega(\mathrm{sort}(N))$$

$B \log(M/B) \leq \log N$

$$3\ell \geq \frac{N(\log N - \log e - \log B)}{2 \log N}$$

$\ell = \Omega(N)$ wegen $B < \log N$

Komplexität Permutieren

Theorem ([Aggarwal, Vitter 1988])

Angenommen, Elemente werden nur
kopiert, bewegt, oder gelöscht,
dann gibt es eine Permutation die

$$\Omega\left(\min\left\{N, \frac{N}{B}\log_{\frac{M}{B}}\frac{N}{M}\right\}\right)$$

I/O-Operationen benötigt.

Eine zufällig gewählte Permutation (uniform) benötigt mit hoher Wahrscheinlichkeit diese Anzahl von I/O-Operationen