Fortgeschrittene Netzwerk- und Graph-Algorithmen

Prof. Dr. Hanjo Täubig

Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
(Prof. Dr. Ernst W. Mayr)
Institut für Informatik
Technische Universität München

Wintersemester 2010/11

Fundamentale Ungleichung

Satz

Für jeden Graphen G gilt:

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

Beweis.

- Spezialfall: Für unzusammenhängende Graphen sowie den Graph mit nur einem Knoten gilt $\kappa(G) = \lambda(G) = 0 \leq \delta(G)$.
- Ansonsten: Die inzidenten Kanten eines Knotens v mit $\deg(v) = \delta(G)$ bilden einen Kanten-Separator.

$\Rightarrow \lambda(G) \leq \delta(G)$

Fundamentale Ungleichung

Beweis.

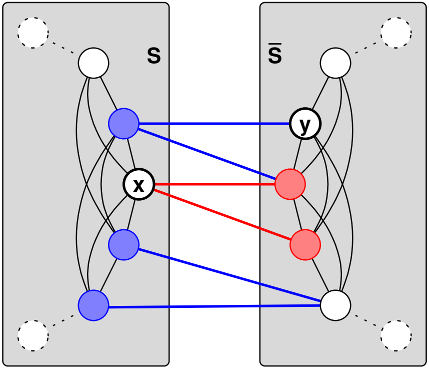
- Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit mindestens zwei Knoten.
  Betrachte Kanten-Separator minimaler Kardinalität.
  Dieser partitioniert die Knotenmenge in S und $\bar{S} = V \setminus S$.

- Falls alle Kanten zwischen S und $\bar{S}$ vorhanden sind, gilt
  $\lambda(G) = |S| \cdot |\bar{S}| \geq n - 1 \geq \kappa(G)$
  ($|S| \cdot |\bar{S}|$ ist am kleinsten, wenn nur 1 Knoten von den restlichen $n - 1$ abgetrennt wird)

- Anderenfalls existieren Knoten $x \in S$ und $y \in \bar{S}$ mit $\{x, y\} \notin E$, wobei die Nachbarn von x in $\bar{S}$ zusammen mit allen Knoten aus $S \setminus \{x\}$, die Nachbarn in $\bar{S}$ haben, einen Knoten-Separator bilden.
  Dieser Knoten-Separator ist höchstens so groß wie die Anzahl der Kanten von S nach $\bar{S}$, und er separiert mindestens x und y.

$\square$

Fundamentale Ungleichung



- rote und blaue Kanten bilden zusammen einen Kantenseparator
- rote und blaue Knoten bilden einen Knotenseparator für x und y

Fundamentale Ungleichung

Der Knotenseparator hat höchstens die gleiche Kardinalität wie der Kantenseparator, denn

- zu jedem roten / blauen Knoten gibt es mindestens eine rote / blaue Kante und
- rote und blaue Kanten sind disjunkt (zu den roten ist x inzident und zu den blauen nicht)

Warum kann man nicht einfach alle Knoten in S nehmen, die einen Nachbarn in $\bar{S}$ haben (also x anstatt der roten Knoten)?

- weil dann evt. keine Knoten von S übrigbleiben

$\Rightarrow$ dann gäbe es keine zwei Teile, sondern nur einen

Das n-Chain / n-Arc Theorem

Satz (Menger, 1927)

Seien P und Q Teilmengen der Knoten eines ungerichteten Graphen.

Dann sind folgende Größen gleich

- *die maximale Anzahl knotendisjunkter Pfade, die Knoten von P mit Knoten von Q verbinden, und*
- *die minimale Kardinalität einer Knotenmenge, die alle Pfade zwischen Knoten in P und Knoten in Q überschneidet bzw. unterbricht.*

Der Satz von Menger

Satz ("Satz von Menger")

Seien s und t zwei Knoten eines ungerichteten Graphen.

Wenn s und t nicht adjazent sind, dann ist die maximale Anzahl knotendisjunkter s-t-Pfade gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Knoten-Separators.

Satz (Kantenversion)

Die maximale Anzahl kantendisjunkter s-t-Pfade ist gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Kanten-Separators.

(Ford/Fulkerson, Dantzig/Fulkerson, Elias/Feinstein/Shannon, 1956)

Eng verwandt: MaxFlow-MinCut-Theorem
(Kantenversion von Menger's Theorem kann als Spezialfall gesehen werden, wo alle Kantengewichte den gleichen Wert haben.)

Whitney's Theorem

Satz (Whitney, 1932)

Sei G ein nicht-trivialer Graph und k eine natürliche Zahl.
G ist genau dann k-(knoten-)zusammenhängend, wenn alle Paare verschiedener Knoten (s, t) durch k knotendisjunkte s-t-Pfade verbunden werden können.

Schwierig bei der Herleitung ist nur, dass der Satz von Menger fordert, dass die Knoten nicht adjazent sind.
Da diese Bedingung bei der Kantenversion nicht auftritt, folgt aus dieser sofort:

Satz

Sei G ein nicht-trivialer Graph und k eine natürliche Zahl.
G ist genau dann k-kanten-zusammenhängend, wenn alle Paare verschiedener Knoten (s, t) durch k kantendisjunkte s-t-Pfade verbunden werden können.

Gemischter Knoten-/Kanten-Zusammenhang

Definition

Ein Paar (k, ℓ) heißt Zusammenhangspaar zweier Knoten s und t eines Graphen, falls eine Menge aus k Knoten und ℓ Kanten existiert, die jeden Weg zwischen s und t beim Entfernen zerstört, aber es keine solche Menge bestehend aus $k-1$ Knoten und ℓ Kanten oder k Knoten und $\ell-1$ Kanten gibt.

Satz (Beineke & Harary, 1967)

Wenn (k, ℓ) ein Zusammenhangspaar zweier Knoten s und t in einem Graphen ist, dann gibt es $k + \ell$ kantendisjunkte Pfade von s nach t, von denen k knotendisjunkte s-t-Pfade sind.

Einfache Schranken

Satz

Der (Knoten-/Kanten-)Zusammenhang in einem Graphen mit n Knoten und m Kanten ist höchstens

$$\begin{array}{ll} \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor : & \textit{falls } m \geq n-1 \\ 0 : & \textit{sonst} \end{array}$$

Der (Knoten-/Kanten-)Zusammenhang in einem Graphen mit n Knoten und m Kanten ist mindestens

$$\begin{array}{ll} m - \binom{n-1}{2} : & \textit{falls } \binom{n-1}{2} < m \leq \binom{n}{2} \\ 0 : & \textit{sonst} \end{array}$$

Für jeden Graphen G mit $\delta(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ *gilt:* $\lambda(G) = \delta(G)$.

Überlappung von k-Knoten-Komponenten

Die offensichtliche Tatsache, dass

- zwei verschiedene Zusammenhangskomponenten keinen Knoten gemeinsam haben können und
- zwei verschiedene Blöcke höchstens einen Knoten gemeinsamen haben können,

lässt sich wie folgt verallgemeinern:

Satz

Zwei verschiedene k-(Knoten-)Komponenten haben höchstens $k-1$ Knoten gemeinsam.

Nicht-Überlappung von k-Kanten-Komponenten

Satz (Matula, 1968)

Für jede natürliche Zahl k sind die k-Kanten-Komponenten eines Graphen knotendisjunkt.

Beweis.

Übungsaufgabe . . . □

Satz von Mader

Obwohl aus der fundamentalen Ungleichung $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ folgt, dass k-Knoten-/Kanten-Zusammenhang einen Minimalgrad $\geq k$ impliziert, ist das Gegenteil nicht unbedingt der Fall.
Ein hoher Durchschnittsgrad impliziert aber die Existenz eines relativ gut zusammenhängenden Teilgraphen:

Satz (Mader, 1972)

Jeder Graph mit Durchschnittsgrad mindestens $4k$ enthält einen k-zusammenhängenden Teilgraph.

Kanten-Schnitte

- ungerichteter gewichteter Graph $G = (V, E)$
- zwei disjunkte Knotenteilmengen $X, Y \subseteq V$, $X \cap Y = \emptyset$
- Gewichtssumme der Kanten von Knoten in X zu Knoten in Y: $w(X, Y)$
- für gerichtete Graphen analog, allerdings Startknoten in X und Zielknoten in Y
- Schnitt S (engl. cut): Knotenmenge mit $\emptyset \subset S \subset V$, Gewicht / Kapazität $w(S, V \setminus S)$
- ungewichtete Graphen: Gewicht des Schnitts ist Anzahl der Kanten von S nach $V \setminus S$.

Kanten-Schnitte minimalen Gewichts (Minimum Cuts)

Definition

Ein Minimum Cut ist ein Schnitt mit minimalem Gewicht.

Ein Schnitt S ist also genau dann ein Minimum Cut, wenn für jeden Schnitt T gilt

$$w(S, V \setminus S) \leq w(T, V \setminus T)$$

Fakt

Ein Kanten-Schnitt minimalen Gewichts in einem zusammenhängenden Graphen mit echt positiven Kantengewichten induziert einen zusammenhängenden Teilgraphen.

Satz

In einem Graphen mit n Knoten kann es höchstens $\binom{n}{2}$ verschiedene Minimum Cuts geben.

Minimum Cuts

Lemma

Sei $(S, V \setminus S)$ ein Minimum Cut in $G = (V, E)$.
Dann gilt für jede nicht-leere Teilmenge $T \subset S$:

$$w(T, S \setminus T) \geq \frac{\lambda}{2}$$

Beweis.

- Annahme: $w(T, S \setminus T) < \frac{\lambda}{2}$
- $w(T, V \setminus S) + w(S \setminus T, V \setminus S) = \lambda$
- o.B.d.A.: $w(T, V \setminus S) \leq \frac{\lambda}{2}$
  (sonst vertausche T und $S \setminus T$)

$\Rightarrow$ $w(T, V \setminus T) = w(T, S \setminus T) + w(T, V \setminus S) < \lambda$ (Widerspruch)

$\square$

Minimum Cuts

Notation:

- $\bar{X} = V \setminus X$
- Im Folgenden werden wir einen Schnitt $(X, \bar{X})$ oft einfach nur mit X bezeichnen.

Lemma

Seien $(A, \bar{A})$ und $(B, \bar{B})$ mit $A \neq B$ zwei Minimum Cuts in $G = (V, E)$, so dass $T = A \cup B$ auch ein Minimum Cut in G ist.

Dann gilt:

$$w(A, \bar{T}) = w(B, \bar{T}) = w(A \setminus B, B) = w(A, B \setminus A) = \frac{\lambda}{2}$$

Minimum Cuts

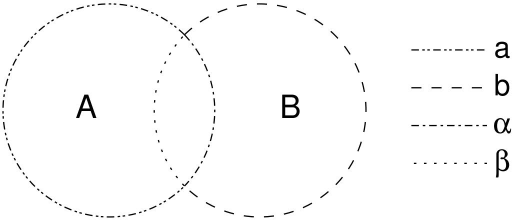


Abbildung: Schnitt zweier Minimum Cuts A und B

Minimum Cuts

Beweis.

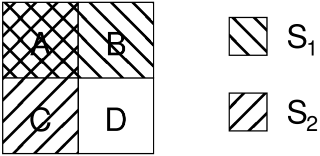
- Sei $a = w\left(A, \bar{T}\right)$,
  $b = w\left(B, \bar{T}\right)$,
  $\alpha = w\,(A, B \setminus A)$ und
  $\beta = w\,(B, A \setminus B)$.

$\Rightarrow$ $w\left(A, \bar{A}\right) = a + \alpha = \lambda$,
$w\left(B, \bar{B}\right) = b + \beta = \lambda$
$w\left(T, \bar{T}\right) = a + b = \lambda$

- Es gilt auch:
  $w\left(A \setminus B, B \cup \bar{T}\right) = a + \beta \geq \lambda$ und $w\left(B \setminus A, A \cup \bar{T}\right) = b + \alpha \geq \lambda$.
- Dieses (Un-)Gleichungssystem hat nur eine Lösung:
  $a = \alpha = b = \beta = \frac{\lambda}{2}$.

$\square$

Minimum Cuts

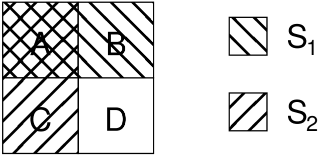


Definition

Ein Paar $\langle S_1, S_2 \rangle$ heißt Crossing Cut, falls S_1, S_2 Minimum Cuts sind und keine der folgenden Mengen leer ist:

- $A = S_1 \cap S_2$,
- $B = S_1 \setminus S_2$,
- $C = S_2 \setminus S_1$
- $D = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$

Crossing Cuts



Lemma

Seien $\langle S_1, S_2 \rangle$ *Crossing Cuts und seien Mengen wie folgt definiert:*
$A = S_1 \cap S_2$, $B = S_1 \setminus S_2$, $C = S_2 \setminus S_1$ *and* $D = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$. *Dann gilt:*

1. *A, B, C und D sind Minimum Cuts.*
2. $w(A, D) = w(B, C) = 0$
3. $w(A, B) = w(B, D) = w(D, C) = w(C, A) = \frac{\lambda}{2}$

Crossing Cuts

Beweis.

- Da S_1 und S_2 Minimum Cuts sind, gilt:
  - $w\left(S_1, \bar{S_1}\right) = w(A, C) + w(A, D) + w(B, C) + w(B, D) = \lambda$
  - $w\left(S_2, \bar{S_2}\right) = w(A, B) + w(A, D) + w(B, C) + w(C, D) = \lambda$

$\Rightarrow$ $w(A, B) + w(A, C) + 2w(A, D) + 2w(B, C) + w(B, D) + w(C, D) = 2\lambda$

- Da es keinen Schnitt mit Kapazität $< \lambda$ gibt, gilt:

$$\begin{array}{rcl} w\left(A, \bar{A}\right) & = & w(A, B) + w(A, C) + w(A, D) & \geq & \lambda \\ w\left(B, \bar{B}\right) & = & w(A, B) + w(B, C) + w(B, D) & \geq & \lambda \\ w\left(C, \bar{C}\right) & = & w(A, C) + w(B, C) + w(C, D) & \geq & \lambda \\ w\left(D, \bar{D}\right) & = & w(A, D) + w(B, D) + w(C, D) & \geq & \lambda \end{array}$$

$\Rightarrow$ $2[w(A, B) + w(A, C) + w(A, D) + w(B, C) + w(B, D) + w(C, D)] \geq 4\lambda$

$\Rightarrow$ $w(A, D) = w(B, C) = 0$ (keine Diagonalkanten)

Crossing Cuts

Beweis.

- Die waagerechte Linie in der Abbildung entspricht dem Minimum Cut $\left(S_1, \bar{S_1}\right) = (A \cup B, C \cup D) = \lambda$, die senkrechte entspricht $\left(S_2, \bar{S_2}\right) = (A \cup C, B \cup D) = \lambda$.
- Analogie: Länge der Kanten entspricht Kapazität der geschnittenen Kanten
- Annahme: die waagerechte und senkrechte Linie schneiden sich nicht genau in der Mitte

$\Rightarrow$ Dann definiert eine der Teilmengen $X = A$, B, C oder D einen Schnitt $w(X, \bar{X}) < \lambda$ (Widerspruch)

$\Rightarrow$ $w(A, B) = w(B, D) = w(D, C) = w(C, A) = \frac{\lambda}{2}$ und $w(A, \bar{A}) = w(B, \bar{B}) = w(C, \bar{C}) = w(D, \bar{D}) = \lambda$

$\square$