

Fortgeschrittene Netzwerk- und Graph-Algorithmen

Prof. Dr. Hanjo Täubig

Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
(Prof. Dr. Ernst W. Mayr)
Institut für Informatik
Technische Universität München

Wintersemester 2010/11



k-Kantenzusammenhangskomponenten

David W. Matula: *k*-Components, Clusters, and Slicings in Graphs

- gegeben: ungewichteter, ungerichteter Graph $G = (V, E)$
- Wdh.: Eine **k-Kanten-(Zusammenhangs-)Komponente** von G ist ein maximaler k -kanten-zusammenhängender Teilgraph von G .
- Da wir in diesem Abschnitt nur über *Kantenzusammenhangskomponenten* sprechen, werden diese hier oft einfach als **k-Komponenten** bezeichnet (auch wenn sich das Wort sonst auf *Knotenzusammenhang* bezieht)
- Teilgraphen bestehend aus einem einzelnen isolierten Knoten ($k = 0$) nennen wir **triviale** Komponenten, aber diese werden hier nicht als k -Komponenten angesehen.

Vereinigung von Teilgraphen

Lemma

Seien G_1, G_2, \dots, G_ℓ Teilgraphen von G , so dass ihre Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{\ell} G_i$ (einfach) **zusammenhängend** ist.

Dann gilt:

$$\lambda \left(\bigcup_{i=1}^{\ell} G_i \right) \geq \min_{1 \leq i \leq \ell} \{ \lambda(G_i) \}$$

Vereinigung von Teilgraphen

Beweis.

- Wenn $\bigcup_{i=1}^{\ell} G_i$ aus einem einzigen Knoten besteht, gilt die Behauptung (denn beide Seiten sind Null).
- Sei anderenfalls $C = (A, \bar{A})$ ein MinCut von $\bigcup_{i=1}^{\ell} G_i$.
- MinCut C muss mindestens eine Kante enthalten, da $\bigcup_{i=1}^{\ell} G_i$ zusammenhängend ist und mindestens 2 Knoten hat.
- Falls C eine Kante eines Teilgraphen G_j enthält, enthält sowohl A als auch \bar{A} jeweils mindestens einen Knoten aus $V(G_j)$, d.h. C muss einen Cut für G_j enthalten.

⇒ Für mindestens ein $j \in \{1, \dots, \ell\}$ gilt: $\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\ell} G_i\right) \geq \lambda(G_j)$



Vereinigung von Teilgraphen

Für die Teilgraphen G_1, G_2, \dots, G_ℓ von G muss jeder Cut des **induzierten** Teilgraphen $G \left[\bigcup_{i=1}^{\ell} V(G_i) \right]$ einen Cut der einfachen Vereinigung der Teilgraphen $\bigcup_{i=1}^{\ell} G_i$ enthalten. Also gilt:

$$\lambda \left(G \left[\bigcup_{i=1}^{\ell} V(G_i) \right] \right) \geq \lambda \left(\bigcup_{i=1}^{\ell} G_i \right)$$

Folgerung

Wenn G_1, G_2, \dots, G_ℓ Teilgraphen von G sind, so dass $\bigcup_{i=1}^{\ell} G_i$ zusammenhängend ist, dann gilt:

$$\lambda \left(G \left[\bigcup_{i=1}^{\ell} V(G_i) \right] \right) \geq \min_{1 \leq i \leq \ell} \{ \lambda(G_i) \}$$

Vereinigung von Teilgraphen

- Achtung:

In der Folgerung kann die Bedingung, dass die einfache Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{\ell} G_i$ zusammenhängend ist, nicht durch die abgeschwächte Forderung, dass der induzierte Teilgraph der vereinigten Knotenmengen $G \left[\bigcup_{i=1}^{\ell} V(G_i) \right]$ zusammenhängend ist, ersetzt werden!

Bsp.: wenn G_1 und G_2 zwei disjunkte Kreise sind, die in G durch eine einzelne Kante verbunden sind, ist die Ungleichung in der Folgerung nicht erfüllt.

- Eine weitere Konsequenz des Lemmas ist die Tatsache, dass die k -Kanten-Komponenten jedes Graphen disjunkt sind.

Die Kohäsion / Zusammenhangsfunktion

Definition

Für jedes Element (Knoten oder Kante) $x \in V(G) \cup E(G)$ eines Graphen G ist die **Kohäsion (cohesiveness)** bzw. die **Zusammenhangsfunktion $h(x)$** definiert als maximaler Wert des Kantenzusammenhangs von allen Teilgraphen von G , die x enthalten.

Das Maximum $\sigma(G)$ aller Kohäsionswerte des Graphen G wird als **Stärke (strength)** des Graphen bezeichnet, also

$$\sigma(G) = \max\{\lambda(G') : G' \text{ ist Teilgraph von } G\}.$$

Die Kohäsionsmatrix

- Die Zusammenhangsfunktion kann durch die (symmetrische) **Kohäsionsmatrix** dargestellt werden.
- Zeilen und Spalten werden durch die Knoten des Graphen indiziert
- Eintrag für Position v_i, v_j ist jeweils die Kohäsion der Kante $\{v_i, v_j\}$, falls sie existiert, und sonst Null
- Die Kohäsion eines Knotens ist dann das Maximum der entsprechenden Zeile oder Spalte.
- Die Stärke σ von G ist das Maximum aller Matrixeinträge.

Die Kohäsionsmatrix

- Für Knoten $v \in V(G)$ gilt: $0 \leq h(v) \leq \deg(v)$

- Falls $\{v_i, v_j\} \in E(G)$, gilt:

$$1 \leq h(\{v_i, v_j\}) \leq \min\{\deg(v_i), \deg(v_j)\}$$

- $h(x) = 0$ gilt also nur, wenn x ein isolierter Knoten ist.
- $\sigma(G) = 0$ gilt nur, wenn G keine Kante enthält.
- $\sigma(G) = 1$ gilt genau dann, wenn G ein Wald mit mindestens einer Kante ist, denn jeder Kreis würde $\sigma(G) \geq 2$ implizieren.

Eindeutige Komponentenzuordnung

- Für $x \in V(G) \cup E(G)$ und $h(x) \geq 1$ muss es für jedes $k \in \{1, \dots, h(x)\}$ einen k -kanten-zusammenhängenden Teilgraph geben, der x enthält.
- Insbesondere muss es auch einen maximalen solchen Teilgraph (also eine k -Kanten-Komponente) geben.
- Da die k -Kanten-Komponenten sich nicht überschneiden ist dieser maximale Teilgraph (die Komponente) eindeutig.

Folgerung

Für jeden Graphen G , jedes Element $x \in V(G) \cup E(G)$ und jede Zusammenhangszahl $k \in \{1, \dots, h(x)\}$ existiert eine eindeutige k -Kanten-Zusammenhangskomponente in G , die x enthält.

Eindeutige Komponentenzuordnung

- Für jedes Element x mit $h(x) \geq 1$ gilt:
Unter allen Teilgraphen, die x enthalten und die maximalen Kantenzusammenhang (also $h(x)$) haben, hat die eindeutige $h(x)$ -Komponente, die x enthält, die meisten Knoten.
Sie heißt **$h(x)$ -Komponente selektiert durch x** (Symbol: H_x).
- Die Kohäsion eines Elements kann aus dem Wissen über einen beliebigen Teilgraph maximalen Kantenzusammenhangs, der das Element enthält, abgeleitet werden.
- Aus der Kenntnis der k -Kanten-Komponenten von G für alle k kann man $h(x)$ für jedes Element x bestimmen.
- Aber man kann umgekehrt auch mit Hilfe der Zusammenhangsfunktion die Komponente H_x bestimmen.

Komponentenbestimmung

Satz

Sei x ein Element des Graphen G mit $h(x) \geq 1$.

Sei M_x ein maximaler zusammenhängender Teilgraph von G , der x enthält und dessen Elemente alle Kohäsion mindestens $h(x)$ haben.

Dann gilt $M_x = H_x$.

Beweis.

- Für $x \in V(G) \cup E(G)$ mit $h(x) \geq 1$ sei M_x definiert wie in dem Satz.
- Dann haben für jedes $y \in V(M_x) \cup E(M_x)$ alle Elemente von H_y Kohäsion mindestens $h(y) \geq h(x)$, so dass also gilt $H_y \cup M_x = M_x$, also $H_y \subseteq M_x$

Komponentenbestimmung

Beweis.

- Da jedes Element von M_x in einem H_y ist, gilt:

$$M_x = \bigcup \{H_y : y \in V(M_x) \cup E(M_x)\}$$

- Nach dem Lemma gilt daher

$$\lambda(M_x) \geq h(x)$$

- Da M_x selbst ein Teilgraph von G ist, der x enthält, gilt

$$\lambda(M_x) = h(x)$$

- Damit ist M_x ein $h(x)$ -kanten-zusammenhängender Teilgraph von G und muss in der $h(x)$ -Komponente selektiert durch x enthalten sein, also in H_x .

Komponentenbestimmung

Beweis.

- Da wegen $M_x = \bigcup \{H_y : y \in V(M_x) \cup E(M_x)\}$ der Teilgraph H_x in M_x enthalten sein muss, gilt $M_x = H_x$.
- Der im Satz definierte Teilgraph M_x ist damit eindeutig und kann bestimmt werden, indem man ausgehend von x alle Elemente anhängt, die von x über einen Pfad erreichbar sind, dessen Elemente alle Kohäsion mindestens $h(x)$ aufweisen.



Folgerung

Für jeden Graph G und eine beliebige Zahl $k \in \{1, \dots, \sigma(G)\}$ bilden die Knoten und Kanten von G mit Kohäsion mindestens k einen Graph, dessen Komponenten die k -Komponenten von G sind.

Komponentenbestimmung

- Für jeden Graph G sind die $h(x)$ -Komponenten selektiert durch $x \in V(G) \cup E(G)$ von besonderem Interesse. Es wird nun gezeigt, dass in dieser Menge alle k -Kanten-Komponenten von G (für alle $k \in \{1, \dots, \sigma(G)\}$) enthalten sind.

Folgerung

Wenn G' eine k -Komponente (für ein $k \geq 1$) des Graphen G ist, dann gibt es ein $x \in V(G) \cup E(G)$, so dass $G' = H_x$ ist.

Komponentenbestimmung

Beweis.

- Sei G' eine k -Komponente von G .
- Dann gilt $1 \leq k \leq \lambda(G')$ und G' ist damit auch eine $\lambda(G')$ -Komponente von G .
- Wähle $x \in V(G') \cup E(G')$ so, dass $h(x)$ minimal ist und sei M_x definiert wie im Satz. (Man beachte, dass G' in M_x als Teilgraph enthalten sein muss.)
- $M_x = H_x$ ist eine $h(x)$ -Komponente und deshalb k -kanten-zusammenhängend (da $k \leq \lambda(G') \leq h(x)$).
- Da G' ein maximaler k -kanten-zusammenhängender Teilgraph ist, gilt $G' = H_x$.



Zusammenhangsvielfalt

Definition

Für einen Graphen G sei die **Zusammenhangskomponenten**vielfalt $\eta(G)$ definiert als

$$\eta(G) = |\{H : H \text{ ist eine } k\text{-Komponente von } G \text{ für ein } k \geq 1\}|$$

- Aus dem vorangegangenen Korollar folgt $\eta(G) \leq |V(G)| + |E(G)|$.
- Noch genauer (isolierte Knoten sind keine k -Komponenten):

Satz

Für jeden Graph G gilt:

$$\eta(G) \leq \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor$$

Zusammenhangsvielfalt

Beweis.

- Für den Beweis wird eine stärkere Ungleichung für zusammenhängende Graphen gezeigt:

$$\eta(G) \leq \left\lfloor \frac{|V(G)| + 1 - \lambda(G)}{2} \right\rfloor$$

- klar für zusammenhängende Graphen auf 1 oder 2 Knoten
- Induktion: angenommen G ist ein zusammenhängender Graph auf $n \geq 3$ Knoten und die Ungleichung gilt für zusammenhängende Graphen auf weniger als n Knoten.
- Falls $\lambda(G) = \sigma(G)$, dann gilt $\eta(G) = 1$ und somit auch die Ungleichung.

Zusammenhangsvielfalt

Beweis.

- Sonst sei G' der Teilgraph von G , den man aus G durch Löschen der Elemente mit Kohäsion $\lambda(G)$ erhält, d.h.
 G' ist ein Graph, dessen Komponenten die $(\lambda(G) + 1)$ -Komponenten von G sind.
 - Die Kanten von G mit Kohäsion $\lambda(G)$ müssen einen Cut von G beinhalten.
- ⇒ G' ist nicht zusammenhängend oder hat weniger Knoten als G .
- In beiden Fällen hat jede der Komponenten G'_1, G'_2, \dots, G'_j von G' weniger Knoten als G .
- ⇒ Ungleichung lässt sich per Induktionsvoraussetzung auf alle G'_i mit $i \in \{1, \dots, j\}$ anwenden.

Zusammenhangsvielfalt

Beweis.

- Ebenso gilt $\lambda(G'_i) \geq \lambda(G) + 1$ für $i \in \{1, \dots, j\}$.
- Eine k -Komponente von G' muss nun eine k -Komponente einer Komponente von G sein und umgekehrt.
- Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \eta(G') &= \sum_{i=1}^j \eta(G'_i) \leq \sum_{i=1}^j \left\lfloor \frac{|V(G'_i)| + 1 - \lambda(G'_i)}{2} \right\rfloor \\ &\leq \left\lfloor \frac{|V(G')| - j\lambda(G)}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

- Es gilt $|V(G')| \leq |V(G)| - 1$ oder G' ist nicht zusammenhängend, so dass $j \geq 2$ und $j\lambda(G) \geq \lambda(G) + 1$.

Zusammenhangsvielfalt

Beweis.

- In jedem Fall gilt:

$$\eta(G') \leq \left\lfloor \frac{|V(G)| - 1 - \lambda(G)}{2} \right\rfloor$$

- G selbst ist eine k -Komponente von G für $k = \lambda(G)$, und $\eta(G) = \eta(G') + 1$.
- Damit gilt:

$$\eta(G) \leq \left\lfloor \frac{|V(G)| + 1 - \lambda(G)}{2} \right\rfloor$$

Zusammenhangsvielfalt

Beweis.

Ungleichung aus dem Satz:

- Die Ungleichung aus dem Satz ist für triviale Graphen klar.
- Für nichttriviale *zusammenhängende* Graphen folgt sie aus der verschärften Form.
- Für beliebige Graphen folgt sie aus der Summation über die *nichttrivialen* Komponenten.

