Beispiel 196

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$$

Nach Berechnen einiger Werte

$$S_1 = 1 \qquad S_2 = 4 \qquad S_3 = 9$$

vermutet man:

$$S_n = n^2$$

Beispiel (Forts.)

Behauptung:

$$S_n = n^2$$

Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang: $n = 1$ *trivial*

Induktionsschluss: $n \mapsto n + 1$

$$S_{n+1} = S_n + 2 \cdot (n+1) - 1 \stackrel{\text{IA}}{=} n^2 + 2 \cdot n + 1 = (n+1)^2$$

Beispiel 197

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$.
Das arithmetische Mittel A der a_i:

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Das geometrische Mittel G der a_i:

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

Das harmonische Mittel H der a_i:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$

Wir wollen zeigen: $G \leq A$.

Beispiel (Forts.)

Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang: $n = 1$ *trivial,* $n = 2$ *durch Einsetzen:*

$$\begin{aligned}(G \leq A) &\iff \left(\sqrt{a_1 \cdot a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}\right)\\ &\iff \left(4a_1 \cdot a_2 \leq (a_1 + a_2)^2\right)\\ &\iff \left(0 \leq {a_1}^2 - 2a_1a_2 + {a_2}^2 = (a_1 - a_2)^2\right)\end{aligned}$$

Induktionsschluss:
Wir zeigen:
$(P_n \wedge P_2) \Rightarrow P_{n+1}$
Sei

$$b := \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} a_i \; .$$

Es gilt:

Beispiel (Forts.)

$$
\begin{aligned}
\left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right) \cdot b^{n-1} &= \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot (a_{n+1} \cdot b^{n-1}) \\
&\overset{\mathsf{P_n}}{\leq} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^n \cdot \left(\frac{1}{n}(a_{n+1} + (n-1)b)\right)^n \\
&= \left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\frac{1}{n}(a_{n+1} + (n-1)b)\right)\right]^n \\
&\overset{\mathsf{P_2}}{\leq} \left[\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{1}{n}(a_{n+1} + (n-1)b)\right)\right)^2\right]^n \\
&= \left[\frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i + (n-1)b\right)\right]^{2n} \\
&= b^{2n}\,.
\end{aligned}
$$

Beispiel (Forts.)

Eine zweite Beweisvariante verwendet ein etwas ungewöhnliches Induktionsverfahren!
Wir zeigen den Induktionsanfang wie oben und dann für den Induktionsschluss:

1. $P_n \Rightarrow P_{n-1}$
2. $(P_n \wedge P_2) \Rightarrow P_{2n}$

Beispiel (Forts.)

1. *Sei*

$$b := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i.$$

Damit:

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{n-1} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right) \cdot b \overset{P_n}{\leq} \left(\frac{1}{n}\left(b + \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)\right)^n$$

$$= \left(\frac{1 + \frac{1}{n-1}}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^n = \left(\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^n$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n-1} a_i \leq \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^{n-1} \Rightarrow P_{n-1}$$

Beispiel (Forts.)

2. *Es gilt:*

$$\prod_{i=1}^{2n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\prod_{i=n+1}^{2n} a_i\right)$$

$$\overset{P_n}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right)^n \cdot \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{a_i}{n}\right)^n$$

$$= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right) \cdot \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{a_i}{n}\right)\right)^n$$

$$\overset{P_2}{\leq} \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} \frac{a_i}{n}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} a_i\right)^{2n}$$

$$\Rightarrow P_{2n}$$

$\square$

4.8.2 Differenzenoperator

Definition 198

Sei f eine Funktion von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{C}$. Der Operator

$$E : f \mapsto E(f)$$

mit $E(f)(x) := f(x+1)$ heißt Translationsoperator.

$$\Delta : f \mapsto \Delta(f)$$

mit $\Delta(f)(x) := f(x+1) - f(x)$ heißt (Vorwärts-)Differenzenoperator.

$$\nabla : f \mapsto \nabla(f)$$

mit $\nabla(f)(x) := f(x) - f(x-1)$ heißt (Rückwärts-)Differenzenoperator.

Mit I als dem Identitätsoperator, (also $I(f) = f$) gilt damit

$$\Delta(f) = (E - I)(f)$$

$$\nabla(f) = (I - E^{-1})(f)$$

Beispiel 199

Sei $a \in \mathbb{N}_0$:

$$E^a(f)(x) = \underbrace{(E \circ E \circ \cdots \circ E)}_{a}(f)(x) = f(x+a)$$

Beobachtungen:

Seien P, Q Operatoren $\in \{E, I, \Delta, \nabla\}$, sei $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $$(P + Q)(f) = P(f) + Q(f)$$
2. $$(\alpha P)(f) = \alpha \cdot P(f)$$
3. $$(QP)(f) = Q\big(P(f)\big), \text{ i. a. } (QP)(f) \neq (PQ)(f)$$
4. $$\Delta^n = (E - I)^n = \underbrace{(E - I) \ldots (E - I)}_{n} = \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k \right)$$

Satz 200

Aus (4) folgt:

$$\Delta^n(f)(x) = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}E^k\right)(f)(x)$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(x+k)\ .$$

Beweis:

Klar. $\square$

Beispiel 201

$$\Delta^2(x^3)\Big|_{x=0} = \sum_{k=0}^{2}(-1)^{2-k}\binom{2}{k}k^3 = 0 - 2 + 8 = 6$$

4.8.3 Fallende Fakultät

Definition 202

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\frac{x^{\underline{n}}}{x^{\underline{n+1}}} = \frac{1}{x-n}$.

Damit für $n = -1$ „formal“:

$$x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$$

Und für n ersetzt durch $-n$:

$$x^{\underline{-n}} = \frac{x^{\underline{-n+1}}}{x+n}$$

$$x^{\underline{-n}} := \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

$$x^{\overline{-n}} := \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}$$

Lemma 203

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ *gilt:*

1. $$\Delta x^{\underline{n}} = n \cdot x^{\underline{n-1}}$$

2. $$\nabla x^{\overline{n}} = n \cdot x^{\overline{n-1}}$$

Beweis:

(Wir zeigen nur 1.)

- $n > 0$:

$$\begin{aligned}\Delta x^{\underline{n}} &= (x+1)^{\underline{n}} - x^{\underline{n}}\\ &= (x+1)\cdot x^{\underline{n-1}} - (x-n+1)\cdot x^{\underline{n-1}}\\ &= n \cdot x^{\underline{n-1}}\end{aligned}$$

- $n = 0$:

$$\Delta x^{\underline{0}} = (x+1)^{\underline{0}} - x^{\underline{0}} = 0 = 0 \cdot x^{\underline{-1}}$$

Beweis (Forts.):

- $n < 0$. Setze $m := -n$:

$$\begin{aligned}\Delta x^{\underline{-m}} &= (x+1)^{\underline{-m}} - x^{\underline{-m}}\\ &= \frac{1}{(x+2)(x+3)\cdots(x+m+1)} - \frac{1}{(x+1)\cdots(x+m)}\\ &= \frac{(x+1)-(x+m+1)}{(x+1)\cdots(x+m+1)}\\ &= -m \cdot x^{\underline{-m-1}}\end{aligned}$$

$\square$

4.8.4 Diskrete Stammfunktion

Definition 204

Sei f so, dass $\Delta f = g$. Dann heißt f eine diskrete Stammfunktion von g. Schreibweise: $f = \sum g$.

Satz 205

Sei f eine diskrete Stammfunktion von g. Dann gilt:

$$\sum_{i=a}^{b} g(i) = f(b+1) - f(a)$$

Beweis:

Wegen $\Delta f = g$ gilt $g(i) = f(i+1) - f(i)$, also

$$\sum_{i=a}^{b} g(i) = \sum_{i=a}^{b} (f(i+1) - f(i)) = f(b+1) - f(a).$$

$\square$

Beispiel 206

$$\sum x^{\underline{n}} = \frac{x^{\underline{n+1}}}{n+1}$$

für $n \neq -1$.

Beispiel 207

Sei

$$f(x) := \sum x^{\underline{-1}}\,.$$

Dann ist

$$f(x+1) - f(x) = x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + f(x-1) = \ldots = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \ldots + \frac{1}{1} + f(0)$$

Wir setzen o. B. d. A. $f(0) = 0$, damit

$$f(x) = H_x$$

(harmonische Reihe).

Beispiel 208

Es ist $\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = (a-1) \cdot a^x$.

$$\Delta \frac{a^x}{(a-1)} = a^x,$$

bzw.

$$\sum a^x = \frac{a^x}{(a-1)} + C$$

Beispiel 209

Was ist $\sum_{k=0}^{n} k^2$? Es gilt:

$$x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}.$$

Also:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \left(\sum x^{\underline{2}} + \sum x^{\underline{1}}\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \left(\frac{x^{\underline{3}}}{3} + \frac{x^{\underline{2}}}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{3} + \frac{(n+1)\cdot n}{2} \\
&= \frac{n\cdot(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}\,.
\end{aligned}$$

Beispiel 210

Es ist

$$x^m = \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot x^{\underline{k}}\ ,$$

wie wir aus der in Abschnitt 4 (Folie 1) hergeleiteten Formel sehen, wenn wir bedenken, dass diese Formel (zunächst) für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt, die obige Gleichung also eine polynomielle Identität darstellt.

Beispiel (Forts.)

Also:
$$\sum_{k=0}^{n} k^m = \Big(\sum x^m\Big)\Big|_{x=0}^{n+1}$$
$$= \Big(\sum \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot x^{\underline{k}}\Big)\Big|_{x=0}^{n+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot \Big(\sum x^{\underline{k}}\Big)\Big|_{x=0}^{n+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot \left(\frac{x^{\underline{k+1}}}{k+1}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{S_{m,k}}{k+1}(n+1)^{\underline{k+1}}\,.$$

Es ergibt sich ein Polynom in n vom Grad $m+1$.