Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2010/11
Übungsblatt 2
25. Oktober 2010

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: Dienstag, 2. November 2010, 10 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Begründen Sie mit Hilfe der in Aufgabe 1 von Arbeitsblatt 1 formulierten Eigenschaften (*Gesetze*) von ganzen Zahlen und der Ergebnisse aus Hausaufgabe 4 von Blatt 1:

1. Für jede ganze Zahl x ist mindestens eine der Zahlen x und $x+1$ gerade.
2. Jede ganze Zahl x, die nicht gerade ist, ist ungerade.
3. Jede ganze Zahl x, die ungerade ist, ist nicht gerade.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Begründen Sie mit Hilfe der in Aufgabe 1 von Arbeitsblatt 1 formulierten Eigenschaften (*Gesetze*) von ganzen Zahlen.

1. Sei $x \in \mathbb{N}$, d. h. eine positive ganze Zahl, und $y = x + 10$. Dann sind die Zahlen 3 und 20 keine gemeinsamen Teiler von x und y.
2. Bestimmen Sie die Menge der gemeinsamen Teiler von 220 und 235 in extensionaler Schreibweise (Auflistung). Welches ist der größte gemeinsame Teiler von 220 und 235, d. h. $ggT(220, 235)$?

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Es seien zwei reelle Zahlen a und b durch ihre Darstellung $g_a{,}a_1a_2a_3\ldots a_na_{n+1}\ldots$ für a bzw. $g_b{,}b_1b_2b_3\ldots b_nb_{n+1}\ldots$ für b als unendlicher Dezimalbruch gegeben (siehe Arbeitsblatt 1). Wir nehmen an, dass $a_{101} + b_{101} > 9$ gilt.

Geben Sie ein Verfahren an zur Berechnung der ersten 100 Dezimalstellen c_i nach dem Komma der Darstellung der Summe $c = a + b$ als unendlicher Dezimalbruch $g_c{,}c_1c_2c_3\ldots c_nc_{n+1}\ldots$.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

1. Gegeben seien $A = \{x, b, 35, \epsilon\}$, $B = \{x, b, 2, 3, \delta, x\}$ und $C = \{\alpha, 2, 3, x\}$. Wir definieren $D = B \cup (A \cap C)$, $E = D \cap (A \cup B)$, $F = E \cup (A \setminus C)$ und $G = F \cap (A \cup C)$. Berechnen Sie eine extensionale Darstellung von G.
2. Berechnen Sie die Potenzmenge von $A = \{\{1, a\}, \{a, c\}, c\}$. Wie viele Elemente besitzt die Menge $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$?

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

1. Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm für die natürliche $\leq$-Ordnung der Zahlen $[6]$.
   Wie ergibt sich die $\leq$-Ordnung auf $[6]$ aus dem entsprechenden Hasse-Diagramm?
2. Wir entfernen das Paar $(3, 4)$ aus der Relation $\leq$ auf $\mathbb{N}$. Ist dann die resultierende Relation noch transitiv? Begründung!
3. Für welche Mengen M ist die Inklusionsrelation $\subseteq$ auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ eine totale Ordnung? Begründung!

Vorbereitung 2

1. Gibt es eine injektive Abbildung $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$? Begründung!
2. Gibt es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$? Begründung!
3. Gilt für $f : X \to Y$ und $A \subseteq X$ stets $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$? Begründung!

Vorbereitung 3

Arbeiten Sie Merkblatt 1 durch. Es dient der Vorbereitung auf Zusatzaufgaben ab Blatt 3.

Tutoraufgabe 1

Sei R eine binäre Relation.

1. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{n\geq 1} R^n$ transitiv ist!
2. Sei $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $R = \{(x, y)\,;\, y = x + 5\}$. Geben Sie R^* an!
3. Sei $M = [3]$. Bestimmen Sie alle partiellen Ordnungen R über M. Zeichnen Sie jeweils ein Hasse-Diagramm der Relationen und geben Sie an, welche der aufgelisteten Relationen total sind.

Tutoraufgabe 2

1. Finden Sie ein Beispiel für Mengen X, Y, A_1, A_2 mit $A_1, A_2 \subseteq X$ und eine Abbildung $f : X \to Y$, so dass $f(A_1 \setminus A_2) \neq f(A_1) \setminus f(A_2)$ gilt.
2. Ist die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ mit $f(x) = x^2$ injektiv, surjektiv, bijektiv? Begründung!
3. Zeigen Sie, dass für die Komposition $\circ$ zweier Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ gilt: Ist $g \circ f$ bijektiv (auf C), dann ist f injektiv und g surjektiv (auf C).