Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2010/11
Übungsblatt 5
15. November 2010

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 23. November 2010, 10 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Seien A und B Mengen. Man zeige:

1. Die Mengen $A \setminus B$, $B \setminus A$ und $A \cap B$ sind paarweise disjunkt und es gelten die Gleichungen

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) = (A \Delta B) \cup (A \cap B)\,.$$

2. Falls A und B endlich sind, dann gilt die Implikation

$$|A \setminus B| \leq |A| - |B| \quad \Longrightarrow \quad B \subseteq A\,.$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei M eine 3-elementige Menge, d. h. $|M| = 3$. Sei R eine (beliebige) binäre Relation über M, d. h. $R \subseteq M \times M$.

1. Sei $R_2 = R^0 \cup R^1 \cup R^2$. Zeigen Sie $R^3 \subseteq R_2$!

   Ist R_2 transitiv? Begründung!

2. Geben Sie eine Relation S über einer 4-elementigen Menge M' an, so dass $S_2 = S^0 \cup S^1 \cup S^2$ nicht transitiv ist.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Den folgenden aussagenlogischen Ausdruck bezeichnen wir mit F:

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow r\,.$$

1. Bestimmen Sie die Semantik von F als boolesche Funktion (Wahrheitsfunktion) durch Angabe der zugehörigen Wahrheitswerttabelle.

2. Konstruieren Sie eine zu F äquivalente konjunktive Normalform.

3. Ist F allgemeingültig? Begründung!

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir formalisieren die auf Arbeitsblatt 1 aufgelisteten Gesetze für ganze Zahlen durch prädikatenlogische Ausdrücke. Dabei übernehmen wir die Bezeichnungen der entsprechenden Relationen und Operationen als Prädikatsymbole bzw. Funktionssymbole. Beispielsweise lautet die Formalisierung der Transitivität von $<$ wie folgt:

$$(\forall a \in \mathbb{Z}\ \forall b \in \mathbb{Z}\ \forall c \in \mathbb{Z})\,[\,(a < b\ \wedge\ b < c)\ \Rightarrow\ a < c\,]\,,$$

zulässig ist auch die Abkürzung

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{Z})\,[\,(a < b\ \wedge\ b < c)\ \Rightarrow\ a < c\,]\,.$$

Formalisieren Sie in entsprechender Weise alle auf Arbeitsblatt 1 (Seite 2, unten) aufgelisteten Gesetze!

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Wir betrachten prädikatenlogische Formeln mit Prädikaten über dem Universum $\mathbb{R}$.

1. Wir nehmen an, dass für einstellige Prädikate P und Q die folgende Aussage gilt:

   $$(\exists x)[P(x)] \;\wedge\; (\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)]$$

   Man zeige, dass dann $(\exists x)[Q(x)]$ folgt.

2. Wir nehmen an, dass für ein 3-stelliges Prädikat P die folgende Aussage F gilt:

   $$(\forall x\ \exists y\ \forall z)\,[P(x,y,z)]\,.$$

   Man leite eine pränexe prädikatenlogische Formel her, die zu $\neg F$ äquivalent ist.

Vorbereitung 2

1. Direkter Beweis:
   Geben Sie für die folgende Aussage einen direkten Beweis an.

   Das arithmetische Mittel $b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ von n Zahlen a_i, $1 \le i \le n$ bleibt unverändert, falls die Folge der a_i mit beliebig vielen $b's$ erweitert wird, d. h.

   $$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \;=\; \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \;+\; m\cdot b\right).$$

2. Indirekter Beweis:
   Es seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen mit $m > n \cdot k$.
   Zeigen Sie: Verteilt man m Hamster auf n Käfige, so befinden sich in mindestens einem Käfig $k+1$ oder mehr Hamster.

   Führen Sie einen indirekten Beweis, indem Sie annehmen, in allen Käfigen würden sich nach einer Verteilung weniger als $k+1$ Hamster befinden.

3. Schubfachprinzip:
   Lassen sich obige Aussagen auch mit dem „Schubfachprinizip“ beweisen?

Vorbereitung 3

1. Man zeige: $(\log n^2)^2 \in o(2^{\ln n})$.

2. Sei $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.
   Man zeige $f(x) = \mathcal{O}(x^n)$.

Tutoraufgabe 1

Wir betrachten prädikatenlogische Formeln für Prädikate über dem Universum $\mathbb{R}$.

1. Seien P und Q einstellige Prädikate, für die die folgenden Aussagen gelten:

   $$(\forall x)[P(x)] \quad \wedge \quad (\exists x)[P(x) \Rightarrow Q(x)]$$

   Man zeige, dass dann $(\exists x)[Q(x)]$ folgt.

2. Seien P und Q einstellige Prädikate, für die die folgenden Aussagen gelten:

   $$(\exists x)[P(x)] \quad \wedge \quad (\exists x)[P(x) \Rightarrow Q(x)]$$

   Man zeige, dass dann nicht notwendigerweise $(\exists x)[Q(x)]$ gilt.

3. Für Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ wird $f(n) \in \omega(g(n))$ wie folgt definiert:

   $$f(n) \in \omega(g(n)) \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall c > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0)\,[\,|f(n)| > c \cdot g(n) \geq 0\,]\,.$$

   Man leite eine pränexe prädikatenlogische Formel für die Aussage $f(n) \notin \omega(g(n))$ her und zeige die Erfüllbarkeit der erhaltenen Formel mit einem Beispiel.

Tutoraufgabe 2

1. Widerspruchsbeweis:
   Sei S eine endliche Menge und $f : S \to S$. Man zeige durch Widerspruchsbeweis die Implikation

   $$f \text{ surjektiv} \implies f \text{ injektiv}\,.$$

2. Schubfachprinzip:
   Nehmen wir an, dass jeder der 520000 Einwohner von Hannover zwei Namensinitialen besitzt aus einem 26-elementigen Alphabet. Dabei bilden die zwei Initialen einer Person ein (geordnetes) Buchstaben-2-Tupel.

   Zeigen Sie: Es gibt in Hannover 3 Personen mit gleichen Initialen, die am gleichen Tag des Jahres (365 Tage) Geburtstag haben.

Tutoraufgabe 3

Ordnen Sie die folgenden Funktionen so, dass für zwei in der Anordnung aufeinander folgende Funktionen f und g gilt: $f(n) \in o(g(n))$ oder $f(n) \in O(g(n))$. Beweisen Sie Ihre Anordnung. Benutzen Sie ggf. die Monotonieeigenschaften elementarer Funktionen ohne Beweis.

$$f_1(n) = 2^{\ln n}\,, \qquad f_2(n) = \sqrt{n^2}\,,$$
$$f_3(n) = (\ln n)^{\ln n}\,, \qquad f_4(n) = (\log n^2)^2\,.$$