Was sind (keine) Diskreten Strukturen?

- Die Analysis (Integral- und Differentialrechnung), (komplexe) Funktionentheorie oder die Funktionalanalysis sind Teilgebiete der Mathematik, die sich mit kontinuierlichen Mengen und Größen befassen.
- Die Analysis (und Bereiche wie das Wissenschaftliche Rechnen) sind Grundlagen der Ausbildung von Naturwissenschaftlern und Ingenieuren.
- In der Algebra, der Kombinatorik und z.B. der Graphentheorie sind jedoch häufig und z.T. fast ausschließlich diskrete Objekte oder Strukturen das Ziel der Betrachtungen und Untersuchungen.

(Forts.)

- In der Informatik spielen (letztlich auf Grund der umfassenden Verbreitung digitaler Rechner) diskrete Mengen und Strukturen die Hauptrolle (z.B. Texte, rasterorientierte Graphik, Kombinatorik, (Aussagen-)Logik, Schaltkreise und ICs, ...).
- Rechenzeit und Speicherplatz digitaler Rechner kommen in diskreten Einheiten vor.
- Aber: Ob der physikalische Raum oder die Zeit diskret sind, ist eine Frage (verschiedener) Weltmodelle der Physik!

2. Zusammenwirken mit / Abgrenzung von anderen Bereichen

Letztlich werden fast alle Bereiche der Mathematik benutzt; andererseits hat die Diskrete Mathematik großen Einfluss auf zahlreiche Bereiche der Mathematik und Informatik. Gelegentlich werden jedoch andere als die gebräuchlichen methodischen Grundlagen benötigt, z. B. da die betrachteten Funktionen im Allgemeinen nicht stetig sind.

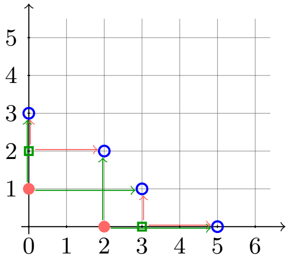
Beispiel 1

Polynome als Funktionen (mit Ableitung, Tangenten, ...) sind nicht unbedingt Stoff der Diskreten Mathematik; ein Beispiel für eine diskrete Betrachtung sind dagegen die sogenannten *Newton-Polytope*:

$$\begin{array}{ll} y - x^2: & y^2 + x^3: \\ & \\ +y \mapsto (1,0,1) & +y^2 \mapsto (1,0,2) \\ -x^2 \mapsto (-1,2,0) & +x^3 \mapsto (1,3,0) \end{array}$$

Die Monome über $\{x, y\}$ werden also als (Faktor, x-Potenz, y-Potenz) dargestellt.

Beispiel 2



Die blauen Kreise entstehen durch Vektoraddition der grünen Quadrate und der roten Punkte und stellen die Polytope des Produkts

$$(y - x^2)\left(y^2 + x^3\right) = y^3 + yx^3 - y^2x^2 - x^5$$

dar (Minkowski-Addition).

3. Komplexität: Ein warnendes Beispiel

$$
\begin{aligned}
(k+2)\cdot\Bigg(1 \quad &- \quad \Big(wz+h+j-q\Big)^2 \\
&- \quad \Big((gk+2g+k+1)(h+j)+h-z\Big)^2 \\
&- \quad \Big(2n+p+q+z-e\Big)^2 \\
&- \quad \Big(16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2+1-f^2\Big)^2 \\
&- \quad \Big(e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2\Big)^2 \\
&- \quad \Big((a^2-1)y^2+1-x^2\Big)^2 \\
&- \quad \Big(16r^2y^4(a^2-1)+1-u^2\Big)^2 \\
&- \quad \Big(n+l+v-y\Big)^2 \\
&- \quad \Bigg(\Big((a+u^2(u^2-a))^2-1\Big)\Big(n+4dy\Big)^2+1-\Big(x+cu\Big)^2\Bigg)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad \Big((a^2-1)l^2+1-m^2\Big)^2 \\
&- \quad \Big(q+y(a-p-1)+s\big(2ap+2a-p^2-2p-2\big)-x\Big)^2 \\
&- \quad \Big(z+pl\big(a-p\big)+t\big(2ap-p^2-1\big)-pm\Big)^2 \\
&- \quad \Big(ai+k+1-l-i\Big)^2 \\
&- \quad \Big(p+l\big(a-n-1\big)+b\big(2an+2a-n^2-2n-2\big)-m\Big)^2 \;\Bigg)
\end{aligned}
$$

Die positiven Werte, die dieses Polynom mit $(a, \ldots, z) \in \mathbb{N}_0{}^{26}$ annimmt, sind genau alle Primzahlen.
Deshalb empfiehlt sich oft die Verwendung eines symbolischen Mathematikprogramms, z. B. Maple.

4. Mathematische und notationelle Grundlagen

4.1 Mengen

Beispiel 3

$$A_1 = \{2, 4, 6, 8\};$$
$$A_2 = \{0, 2, 4, 6, \ldots\} = \{n \in \mathbb{N}_0; n \text{ gerade}\}$$

Bezeichnungen:

$x \in A \Leftrightarrow A \ni x$	x Element A
$x \notin A$	x nicht Element A
$B \subseteq A$	B Teilmenge von A
$B \subsetneq A$	B echte Teilmenge von A
$\emptyset$	leere Menge, dagegen:
$\{\emptyset\}$	Menge mit leerer Menge als Element

Spezielle Mengen:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} =$ Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q} =$ Menge der Brüche (rationalen Zahlen)
- $\mathbb{R} =$ Menge der reellen Zahlen
- $\mathbb{C} =$ Menge der komplexen Zahlen
- $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ Restklassen bei Division durch n
- $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$

Operationen auf Mengen:

- $|A|$ Kardinalität der Menge A
- $A \cup B$ Vereinigungsmenge
- $A \cap B$ Schnittmenge
- $A \setminus B$ Differenzmenge
- $A \vartriangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ symmetrische Differenz
- $A \times B := \{(a, b); a \in A, b \in B\}$ kartesisches Produkt
- $A \uplus B$ Disjunkte Vereinigung: die Elemente werden nach ihrer Herkunft unterschiedlich gekennzeichnet
- $\bigcup\limits_{i=0}^{n} A_i$ Vereinigung der Mengen $A_0, A_1, \ldots, A_n$
- $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ Schnittmenge der Mengen A_i mit $i \in I$
- $\mathrm{P}(M) := 2^M := \{N; N \subseteq M\}$ Potenzmenge der Menge M

Beispiel 4

Für $M = \{a, b, c, d\}$ ist

$$\begin{array}{rcll} P(M) & = & \{ & \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \\ & & & \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \\ & & & \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \\ & & & \{a,b,c,d\} \\ & & \} & \end{array}$$

Satz 5

Die Menge M habe n Elemente, $n \in \mathbb{N}$. Dann hat $P(M)$ 2^n Elemente!

Beweis:

Sei $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Um eine Menge $L \in P(M)$ (d.h. $L \subseteq M$) festzulegen, haben wir für jedes $i \in [n]$ die (unabhängige) Wahl, a_i zu L hinzuzufügen oder nicht. Damit ergeben sich $2^{|[n]|} = 2^n$ verschiedene Möglichkeiten. $\square$

Bemerkungen:

1. Der obige Satz gilt auch für $n = 0$, also die leere Menge $M = \emptyset$.
2. Die leere Menge ist in jeder Menge als Teilmenge enthalten.
3. $P(\emptyset)$ enthält als Element genau $\emptyset$ (also $P(\emptyset) \neq \emptyset$).

4.2 Relationen und Abbildungen

Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Mengen. Eine Relation über $A_1, \ldots, A_n$ ist eine Teilmenge

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \bigtimes_{i=1}^{n} A_i$$

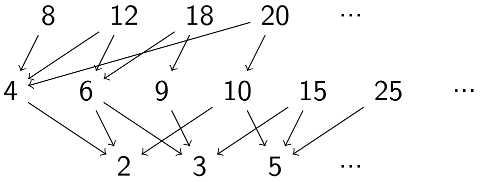
Andere Schreibweise (Infixnotation) für $(a, b) \in R$: aRb.

Eigenschaften von Relationen ($R \subseteq A \times A$):

- reflexiv: $(a, a) \in R \quad \forall a \in A$
- symmetrisch: $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R \quad \forall a, b \in A$
- asymmetrisch: $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R \quad \forall a, b \in A$
- antisymmetrisch: $\big[(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R\big] \Rightarrow a = b \quad \forall a, b \in A$
- transitiv: $\big[(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R\big] \Rightarrow (a, c) \in R \quad \forall a, b, c \in A$
- Äquivalenzrelation: reflexiv, symmetrisch und transitiv
- Partielle Ordnung (aka *partially ordered set*, *poset*): reflexiv, antisymmetrisch und transitiv

Beispiel 6

$(a, b) \in R$ sei $a|b$ „a teilt b“, $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
Die graphische Darstellung ohne reflexive und transitive Kanten heißt Hasse-Diagramm:



Im Diagramm wird $a|b$ durch einen Pfeil $b \longrightarrow a$ dargestellt.
Die Relation $|$ stellt eine *partielle Ordnung* dar.

Definition 7

Sei $R \subseteq A \times B$ eine binäre Relation. Dann heißt

$$\{a \in A;\ (\exists b \in B)[(a,b) \in R]\}$$

das Urbild der Relation R und

$$\{b \in B;\ (\exists a \in A)[(a,b) \in R]\}$$

das Bild der Relation R.

Definition 8

Sei $R \subseteq A \times B$ eine binäre Relation. Dann heißt

$$R^{-1} := \{(b,a);\ (a,b) \in R\}$$

die inverse (oder auch konverse) Relation zu R.

Definition 9

Seien $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ binäre Relationen. Dann heißt

$$R \circ S := \{(a,c) \in A \times C;\ (\exists b \in B)[(a,b) \in R \text{ und } (b,c) \in S]\}$$

das Produkt der Relationen R und S. Es wird oft auch einfach durch RS bezeichnet.

Satz 10

Das Relationenprodukt $\circ$ ist assoziativ und distributiv über $\cup$ und $\cap$.

Beweis:

Hausaufgabe! $\square$

Bemerkungen zur Notation

Wir haben gerade die Symbole

- $\forall$ "für alle" und
- $\exists$ "es gibt"

gebraucht. Dies sind so genannte logische Quantoren, und zwar der All- und der Existenzquantor.

Die Formel

$$\{a \in A;\ (\exists b \in B)[(a,b) \in R]\}$$

ist daher zu lesen als

> *Die Menge aller Elemente a aus der Menge A, für die es jeweils ein b aus der Menge B gibt, so dass das Paar (a,b) in der Menge/Relation R enthalten ist.*

Definition 11

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation. Dann ist

1. $R^0 := \{(a, a);\ a \in A\}$ $(=: \mathrm{Id}_A)$
2. $R^{n+1} := R^n \circ R$ für $n \in \mathbb{N}_0$

Beispiel 12

Sei Kind die Relation

$$\{(k, v);\ k \text{ ist Kind von } v\}$$

Dann bezeichnet Kind^2 die Enkel-Relation.

Definition 13

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation.

1. Dann ist der reflexive (symmetrische, transitive) Abschluss (auch als reflexive, symmetrische bzw. transitive Hülle bezeichnet) die kleinste (im mengentheoretischen Sinn) Relation, die R enthält und reflexiv (symmetrisch, transitiv) ist.
2. Die transitive Hülle von R wird oft mit R^+ bezeichnet.
3. Die reflexive transitive Hülle von R wird gewöhnlich mit R^* bezeichnet.

Beispiel 14

Die transitive Hülle der Relation „die Mutter von k ist m" ist die Menge der Tupel (k', m'), so dass gilt:

$$k' \text{ hat seine Mitochondrien von } m' \text{ geerbt.}$$

4.3 Funktionen

Sei $f : A \to B$ eine *Funktion* von A nach B (also eine Relation mit genau einem Paar $\big(f(a), a\big) \quad \forall a \in A$).
(Eine solche Relation heißt auch rechtstotal und linkseindeutig.)

- Das *Urbild* von $b \in B$: $f^{-1}(b) = \{a \in A; f(a) = b\}$.
- Schreibweisen: $(A' \subseteq A, B' \subseteq B)$
  - $f(A') = \bigcup_{a \in A'} \{f(a)\}$
  - $f^{-1}(B') = \bigcup_{b \in B'} f^{-1}(b)$
- Sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen, so ist ihre Komposition $g \circ f$ gemäß der entsprechenden Definition für das Relationenprodukt definiert.

Bemerkungen:

Man beachte, dass wir für eine Funktion $f : A \to B$ die zugehörige Relation $\hat{f}$ als die Menge

$$\{(f(a), a) \; ; \; a \in A\}$$

definiert haben, also die Abbildung sozusagen von rechts nach links lesen.

Der Grund dafür ist, dass es in der Mathematik üblich ist, die Komposition (Hintereinanderausführung) einer Funktion g nach einer Funktion f (also $g \circ f$) so zu lesen:

$$g \text{ nach } f \, .$$

Dies liegt daran, dass man für die Anwendung einer Funktion f auf ein Argument x

$$f(x)$$

und für die Anwendung von g nach f auf x dementsprechend

$$g(f(x)) = g \circ f(x)$$

schreibt.

Bemerkung:
Für die zugehörigen Relationen gilt daher:

$$\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}\,.$$