Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2011
Übungsblatt 6
6. Juni 2011

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: Donnerstag, 16. Juni 2011, 14 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (2 Punkte)

Geben Sie ein Beispiel für einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $\langle \Omega, \Pr \rangle$ und zwei unabhängige diskrete Zufallsvariable X und Y über $\langle \Omega, \Pr \rangle$ an, so dass X und Y gleichverteilt sind. Begründen Sie Ihre Konstruktion.

Hausaufgabe 2 (8 Punkte)

Es liegen eine 5-Pfennig-, eine 10-Pfennig- und eine 50-Pfennig-Münze jeweils mit der Rückseite nach oben auf dem Tisch. Wir betrachten einen Zufallsprozess, der in jedem Schritt die Seiten einer Laplace-zufällig aus den 3 Münzen ausgewählten Münze wendet.

Es sei X diejenige diskrete Zufallsvariable, die die Anzahl der Schritte (≥ 1) zählt, bis zum ersten Mal alle Münzen mit der Vorderseite nach oben auf dem Tisch liegen.
(Offenbar gilt beispielsweise $\Pr[X=1] = 0$.)

1. Bestimmen Sie $\Pr[X=3]$ (mit Begründung)!
2. Bestimmen Sie $\Pr[X=n]$ für gerades n (mit Begründung)!
3. Nehmen Sie an, dass genau eine der 3 Münzen mit der Vorderseite nach oben auf dem Tisch liegt, während also die anderen beiden Münzen mit der Rückseite nach oben liegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass nach 2 Schritten wiederum genau eine der Münzen mit der Vorderseite nach oben auf dem Tisch liegt?
4. Bestimmen Sie die Dichtefunktion f_X.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Die Unfallhäufigkeit auf Autobahnen hängt u. a. von den gefahrenen Geschwindigkeiten ab. Wir betrachten für $10^4 = 10000$ Autos 2 Geschwindigkeitsklassen s und l mit $|s| = 1000$ und $|l| = 9000$ Autos. Die Unfallwahrscheinlichkeit in einem bestimmten Streckenabschnitt sei für die Autos der s-Klasse $\frac{11}{1000}$ bzw. der l-Klasse $\frac{1}{1000}$.
Ein Unfall werde für jedes der Autos der s- bzw. l-Klasse mit einer Zufallsvariablen X_i bzw. Y_j mit $i \in [1000]$ bzw. $j \in [9000]$ angezeigt. Die Anzahl der Unfälle insgesamt werde angezeigt durch die Zufallsvariable U.
Wir nehmen sämtliche Unfälle als unabhängig an.

1. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[U]$ und die Varianz $\mathrm{Var}[U]$ als Dezimalzahl ggf. auf 2 Nachkommastellen genau.

   Begründen Sie die Gültigkeit Ihrer Berechnungsschritte!

2. Geben Sie mithilfe der Chebyshevschen Ungleichung eine möglichst kleine obere Schranke c für die Wahrscheinlichkeit $\Pr[U \geq 25]$ an, so dass also $\Pr[U \geq 25] \leq c$ gilt.

3. Geben Sie nun mithilfe der Abschätzung nach Chernoff eine obere Schranke c für $\Pr[U \geq 25]$ an. Stellen Sie c als arithmetischen Ausdruck inklusive Exponentialfunktion, aber ohne Variablen dar.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sei X eine diskrete Zufallsvariable und $(X|X \geq t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ die entsprechende bedingte Zufallsvariable mit Dichte $f_{X|X\geq t}(x) = \Pr[X = x \mid X \geq t]$. Wir nehmen stets $\Pr[X \geq t] \neq 0$ und die Existenz entsprechender Erwartungswerte an.

1. Zeigen Sie die folgende Ungleichung für bedingte Erwartungswerte:

$$t \;\leq\; \mathbb{E}[X \mid X \geq t]\,.$$

2. Wir nehmen zusätzlich $\Pr[X < t] \neq 0$ an. Zeigen Sie mit Benutzung obiger Ungleichung die folgende Verschärfung der Markov-Ungleichung:

$$t \cdot \Pr[X \geq t] \;\leq\; \mathbb{E}[X] \;-\; \mathbb{E}[X \mid X < t] \cdot \Pr[X < t]\,.$$

3. Sei X Poisson-verteilt mit Dichte f_X und $f_X(0) = e^{-1}$ (e ist die Eulersche Zahl). Beweisen Sie durch Anwendung der Chebyshev-Ungleichung

$$\Pr[X \geq 11] \;\leq\; \frac{1}{100}\,.$$

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Bestimmen Sie die erzeugende Funktion einer negativ binomialverteilten Zufallsvariablen.

Vorbereitung 2

1. Sei $(H_n)_{n\geq 1}$ eine rekurrente Ereignisfolge. Die Zufallsvariable Z mit $W_Z = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ messe für $k \in \mathbb{N}$ die Wartezeit $Z = k$ bis zum Eintreten des ersten Ereignisses H_k der Ereignisfolge.

   Zeigen Sie die Ungleichung
   $$\sum_{k\in\mathbb{N}} \Pr[Z = k] \leq 1\,.$$

2. Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger Indikatorvariablen mit gleicher Bernoulli-Verteilung.

   Zeigen Sie, dass die Folge $(H_n)_{n\geq 1}$ der Ereignisse $H_n = (X_n = 1)$ rekurrent ist.

Tutoraufgabe 1

Sei X eine Poisson-verteilte Zufallsvariable $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$.

1. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X^2]$.
2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X^{\underline{n}}]$ für die fallende Potenz $X^{\underline{n}}$.

Tutoraufgabe 2

Sei X eine Zufallsvariable mit $X \sim \mathrm{Bin}(200, \frac{1}{100})$.

1. Berechnen Sie $\Pr[X > 8]$ approximativ mit der Poisson-Verteilung. (Taschenrechner benutzen!)
2. Bestimmen Sie mit der Markov-Ungleichung ein möglichst kleines k, so dass $\Pr[X > k] \leq 10^{-4}$.
3. Bestimmen Sie mit der Chernoff-Ungleichung ein möglichst kleines k, so dass $\Pr[X > k] \leq 10^{-4}$.

Tutoraufgabe 3

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit $W_X = \{0, 1, 2\}$. Für die Dichtefunktion f_X von X gelte $f_X(1) = \frac{1}{4}$ und $f_X(2) = \frac{1}{5}$. X_i sei die i-te Wiederholung von X. Wir bilden $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$ in Abhängigkeit des Wertes einer Poisson-verteilten Zufallsvariablen N, die den Wert 0 mit Wahrscheinlichkeit e^{-2} annehme.

1. Geben Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_X(s)$ der Zufallsvariablen X an.
2. Berechnen Sie den Erwartungswert von Z.
3. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Z den Wert 0 annimmt.

   Hinweis: Man beachte, dass Z auch dann den Wert 0 annimmt, wenn $N = 0$ gilt.

Tutoraufgabe 4

Peter und Paul spielen ein Spiel, bei dem jeder von ihnen mit Wahrscheinlichkeit 1/2 gewinnt. In jeder Runde setzt jeder von ihnen € 10 ein (der Gewinner erhält dann € 20).

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Peter € 100 Gewinn gemacht hat, bevor er € 50 Verlust macht?
2. Wenn Peter erst mal seinen Gewinn hat, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass er insgesamt auf € 50 Verlust kommt?