Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2011
Übungsblatt 11
19. Juli 2011

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 27. Juli 2011, 14 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir betrachten einen Spielautomaten, der in jedem Spiel mit Wahrscheinlichkeit $p \geq \frac{3}{4}$ auf Gewinn für den Betreiber entscheidet. Allerdings kommt es vor, dass der Automat aufgrund einer fehlerhaften Verhaltensänderung dauerhaft nur mit Wahrscheinlichkeit $p \leq \frac{1}{4}$ in einem Spiel auf Gewinn entscheidet. Der Betreiber testet den Automaten mit einer Stichprobe von 12 Spielen und nimmt dabei an, dass die Anzahl T des Auftretens eines Gewinns nach dem Satz von DeMoivre als normalverteilte Zufallsvariable angenähert werden darf.

1. Formulieren Sie einen Test zur Überprüfung der Hypothese $H_0 : p \geq \frac{3}{4}$, die Sie ablehnen, wenn bei 12 Spielen höchstens 6 Mal Gewinn gemacht wird.

   Berechnen Sie näherungsweise den Wert des Fehlers 1. Art.

2. Bestimmen Sie zu Ihrem Test den Wert des Fehlers 2. Art unter der Annahme, dass $\frac{1}{4} < p < \frac{3}{4}$ ausgeschlossen werden kann.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Die folgende Tabelle gibt die Ziehungshäufigkeiten der Superzahlen wieder:

Superzahl	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Häufigkeit	140	134	138	133	160	134	133	137	131	128

Wenden Sie den χ^2-Anpassungstest auf die Nullhypothese, dass nämlich die Ziehungswahrscheinlichkeit für jede Superzahl $\frac{1}{10}$ ist, an (Signifikanzniveau 0.1).

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Begründen Sie Ihre Anworten.

1. Es gibt eine endliche (zeithomogene) Markov-Kette, die keinen absorbierenden Zustand besitzt.

2. Es gibt eine endliche (zeithomogene) Markov-Kette, die nur transiente Zustände besitzt.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Begründen Sie Ihre Antworten.

1. Ein transienter Zustand einer Markov-Kette wird mit Wahrscheinlichkeit 1 verlassen.

2. Sei $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$ die Übergangsmatrix einer Markov-Kette M mit entsprechenden Zuständen 1 und 2. M sei im Zustand 1. Dann ist die Wahrscheinlichkeit gleich 1, dass irgendwann ein Zustandsübergang in den Zustand 2 erfolgt.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Seien $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ die Zufallsvariablen einer zeithomogenen Markov-Kette über den Zuständen $Q = \{0, 1, 2\}$ mit Übergangsmatrix

$$P = (p_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Die Dichtefunktion von X_0, d. h., die Startverteilung der Markov-Kette sei $q_0 = (s_0, s_1, s_2)$.

1. Berechnen Sie die Dichtefunktion q_1 von X_1.
2. Bestimmen Sie die Menge aller stationären Startverteilungen.
3. Beweisen Sie die Unabhängigkeit der beiden Variablen X_0 und X_1.

   Dabei sind X_0 und X_1 als Zufallsvariable über dem zugeordneten Wahrscheinlichkeitsraum $\langle \Omega, \Pr \rangle$ zu betrachten mit

   $$\Omega = \{(x_0, x_1) : x_0, x_1 \in Q\}, \quad \Pr[(x_0, x_1)] = (q_0)_{x_0} \cdot \Pr[X_1 = x_1 | X_0 = x_0],$$

   $$X_0((x_0, x_1)) = x_0 \qquad \text{und} \qquad X_1((x_0, x_1)) = x_1.$$

Vorbereitung 2

1. Wir betrachten Markov-Ketten M mit 6 Zuständen. Wie viele transiente Zustände kann M höchstens besitzen? Begründung!
2. Wie viele stationäre Verteilungen besitzt die Markovkette mit Übergangsmatrix

   $$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}?$$

   Begründung!
3. Gegeben sei eine Markov-Kette M mit Zustandsmenge $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $p_{n,(n+1)} = 2/3$ und $p_{n,0} = 1/3$ für alle $n \in \mathcal{S}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, sich nach langer Zeit im Zustand i zu befinden?

Tutoraufgabe 1

Zwei Zustände A und B einer Markov-Kette gehören zu einer Kommunikationsklasse genau dann, wenn A von B aus erreichbar ist und umgekehrt. Gegeben sei eine Markovkette mit Zustandsmenge $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und Übergangsmatrix

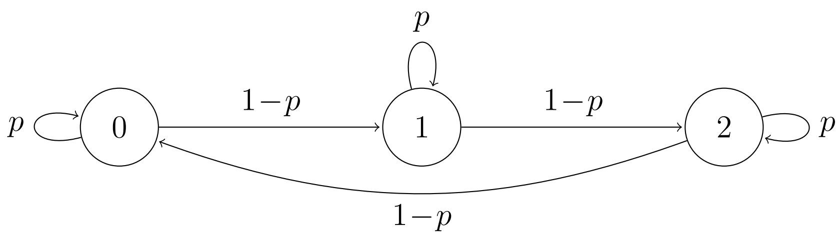
$$M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0,9 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0 & 0 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

1. Welche Zustände bilden eine Kommunikationsklasse? Welche davon sind rekurrent, welche transient?

2. Wir starten im Zustand 0. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nach einer längeren Zeit im Zustand 0 zu sein?

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten eine Markov-Kette M mit der Zustandsmenge $S = \{0, 1, 2\}$ und der Folge $X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots$ von Zufallsvariablen, die durch das folgende Übergangsdiagramm in Abhängigkeit eines Parameters p mit $0 < p < 1$ gegeben ist:



1. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix P von M.

2. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $\Pr[T_{0,2} = 3]$ an. Dabei sei $T_{0,2}$ die Zufallsvariable der Übergangszeit von Zustand 0 in den Zustand 2.

3. Berechnen Sie die erwartete Übergangszeit $h_{0,2}$. Der Rechenweg muss aus Ihrem Protokoll hervorgehen.

4. Berechnen Sie die stationäre Verteilung q^T von M.

Tutoraufgabe 3

Gegeben sei die Übergangsmatrix P einer Markov-Kette M mit Zuständen $S = \{0, 1, 2, 3\}$ wie folgt:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie die Menge der transienten Zustände. Begründung!

2. Berechnen Sie die Ankunftswahrscheinlichkeit $f_{0,2}$. Dabei muss jeweils der Rechenweg aus dem Protokoll hervorgehen.