Zwischenbemerkung zur Nomenklatur:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)$$

4.2 Partitionen von Mengen und Zahlen

4.2.1 Ungeordnete Partitionen

1. Mengenpartitionen

Sei N eine Menge der Kardinalität n und sei $k \in \mathbb{N}_0$. Eine Zerlegung von N in k nichtleere, paarweise disjunkte Teilmengen heißt eine k-Partition von N. Die einzelnen Teilmengen heißen auch Klassen. Ihre Anzahl wird mit

$$S_{n,k}$$

bezeichnet (die sog. Stirling-Zahlen der 2. Art).

Beispiel 167

$N = \{1,2,3,4,5\},\ k = 2$

$$\begin{array}{ll}
\{1\} \cup \{2,3,4,5\} & \{1,2\} \cup \{3,4,5\} \\
\{2\} \cup \{1,3,4,5\} & \{1,3\} \cup \{2,4,5\} \\
\{3\} \cup \{1,2,4,5\} & \{1,4\} \cup \{2,3,5\} \\
\{4\} \cup \{1,2,3,5\} & \{1,5\} \cup \{2,3,4\} \\
\{5\} \cup \{1,2,3,4\} & \{2,3\} \cup \{1,4,5\} \\
 & \{2,4\} \cup \{1,3,5\} \\
 & \{2,5\} \cup \{1,3,4\} \\
 & \{3,4\} \cup \{1,2,5\} \\
 & \{3,5\} \cup \{1,2,4\} \\
 & \{4,5\} \cup \{1,2,3\}
\end{array}$$

$\Rightarrow S_{5,2} = 15.$

Weiter gilt: $S_{n,1} = 1$, $S_{n,2} =$ Übung, $S_{n,n} = 1$.

2. Zahlpartitionen

Sei

$$\mathbb{N}_0 \ni n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

mit $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ und $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k$.

Eine solche Zerlegung heißt k-Partition der Zahl n.

Die Anzahl aller k-Partitionen von $n \in \mathbb{N}$ wird mit

$$P_{n,k}$$

bezeichnet.

Beispiel 168

$n = 8,\ k = 4.$

$$\begin{aligned} 8 &= 5 + 1 + 1 + 1 \\ &= 4 + 2 + 1 + 1 \\ &= 3 + 3 + 1 + 1 \\ &= 3 + 2 + 2 + 1 \\ &= 2 + 2 + 2 + 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow P_{8,4} = 5$

4.2.2 Geordnete Partitionen

1. Mengenpartitionen

Seien N, n, k wie vorher. Eine (beliebig) *geordnete* k-Menge $\subseteq N$ heißt k-Permutation aus N. Ihre Anzahl ist

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = n^{\underline{k}}$$

(„n hoch k fallend“, „fallende Fakultät“).

Analog:

$$n^{\overline{k}} := n \cdot (n+1) \cdots (n+k-1)$$

Überlegung: Jede k-Menge aus N ergibt $k!$ k-Permutationen. Also

$$\binom{n}{k} \cdot k! = n^{\underline{k}}$$

oder:

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Eine k-Mengenpartition ergibt

$$k! \cdot S_{n,k}$$

geordnete k-Mengenpartitionen (Die Klassen sind (beliebig) *untereinander* geordnet, aber nicht *in* sich!).

2. Zahlpartitionen

Eine geordnete Zahlpartition ist gegeben durch

$$\mathbb{N} \ni n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k; \quad n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$$

Betrachte folgende graphische Darstellung:

$$\underbrace{\bullet | \bullet | \bullet | \bullet \cdots \bullet | \bullet | \bullet | \bullet}_{n}$$

Wähle aus den $n-1$ Trennstellen $k-1$ aus. Jede der $\binom{n-1}{k-1}$ Wahlmöglichkeiten ergibt eine eindeutig bestimmte geordnete k-Zahlpartition und umgekehrt.

Ihre Anzahl ist also

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

4.3 Multimengen

Beispiel 169

$M := \{1, 2, 2, 3, 5, 5, 5\} \qquad |M| = 7$

Satz 170

Die Anzahl der k-Multimengen (also Multimengen der Kardinalität k) aus N ($|N| = n$) ist

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{n^{\overline{k}}}{k!} = \frac{(n+k-1)^{\underline{k}}}{k!}.$$

Beweis:

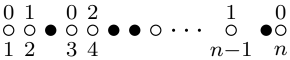
Sei o.B.d.A. $N = \{1, \ldots, n\}$. Betrachte eine Multimenge $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ der Kardinalität k. Sei o.B.d.A. $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$. Definiere die Ersetzung f:

$$f : \quad \begin{array}{ccll} a_1 & & a_1 & \geq 1 \\ a_2 & & a_2 + 1 & \\ a_3 & & a_3 + 2 & \\ \vdots & \longmapsto & \vdots & \\ a_k & & a_k + k - 1 & \leq n + k - 1 \end{array}$$

Das Ergebnis unter f ist eine *Menge* $\subseteq [n + k - 1]$. Die Anzahl der Möglichkeiten auf der rechten Seite beträgt $\binom{n+k-1}{k}$, und die durch f gegebene Zuordnung ist offensichtlich bijektiv. $\square$

Andere Beweisvariante:

Beweis:



Von $n + k$ Kugeln werden k schwarz gefärbt; die erste darf nicht schwarz gefärbt werden. Also bleiben n weiße Kugeln übrig, darunter die erste.

Jede dieser weißen Kugeln zählt nun als sooft ausgewählt, wie unmittelbar rechts davon schwarze Kugeln stehen. Es werden also aus n weißen Kugeln k ausgewählt (mit Wiederholung). $\square$

Beispiel 171

Darstellung zu obigem Beispiel:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \circ & \bullet & \circ & \bullet & \bullet & \circ & \bullet & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & & 2 & & & 3 & & 4 & 5 & & & \end{array}$$

Zugehörige Multimenge:

$$\{1, 2, 2, 3, 5, 5, 5\}$$

4.4 Anzahl von Abbildungen

Betrachte Funktionen von N (Urbildraum) nach R (Bildraum), $|N| = n, |R| = r$ mit $n, r \in \mathbb{N}_0$.
Die Anzahl beliebiger Abbildungen $N \to R$ ist

$$r^n \,.$$

Die Anzahl der injektiven Abbildungen $N \to R$ ist

$$r^{\underline{n}}.$$

Die Anzahl der surjektiven Abbildungen $N \to R$ („geordnete r-Mengenpartitionen von N") ist

$$r! \cdot S_{n,r} \,.$$