# Beispiel (Forts.)

*Zu dieser linearen Rekursionsgleichung*

$$a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2} = 0$$

*gehört das folgende charakteristische Polynom:*

$$(x-2)^2 = x^2 - 4 \cdot x + 4 = 0$$

*Später wird gezeigt, dass die $a_n$ hier von der Form*

$$a_n = (c_1 \cdot n + c_2) \cdot 2^n \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

*sind. Aus den Anfangsbedingungen $(a_0 = 2, a_1 = 6)$ ergibt sich $c_1 = 1$ und $c_2 = 2$. Damit gilt*

$$a_n = (n+2) \cdot 2^n \qquad \forall n \geq 0$$

## Beispiel (Forts.)

*Man zeigt auch allgemein, dass*

$$a_n = (c_1 \cdot n + c_2) \cdot 2^n \quad \textit{folgende Bedingung erfüllt:}$$
$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{C}).$$

## Beispiel 225

Sei $(a_0, a_1, a_2) = (0, 1, 2)$ und

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} \qquad \forall n \geq 3$$

$\big($also $(a_i)_{i\geq 0} = (0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \ldots)\big)$. Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + x - 1 = 0 &= (x-1)(x^2+1) \\ &= (x-1)(x-i)(x+i). \end{aligned}$$

Setze nun $a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot i^n + c_3 \cdot (-i)^n$. Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen erhält man dann $c_1 = 1$ und $c_2 = c_3 = -\frac{1}{2}$, also

$$a_n = 1 - \frac{1}{2}(i^n + (-i)^n).$$

## Satz 226

*Sei* $(q_1, q_2, \ldots, q_d)$ *eine gegebene Folge,* $q_i \in \mathbb{C}, d \geq 1, q_d \neq 0$. *Sei weiter*

$$q(z) := 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots + q_d z^d$$

*Das reflektierte Polynom dazu ist*

$$q^R(z) := z^{\deg(q)} \cdot q\left(\frac{1}{z}\right) = z^d + q_1 z^{d-1} + q_2 z^{d-2} + \ldots + q_d$$

*(Bemerkung:* $q^R(z)$ *ist das charakteristische Polynom). Seien* $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq k}$ *die verschiedenen Nullstellen von* $q^R$*, sei* $d_i$ *die Vielfachheit von* $\alpha_i$*. Damit ist*

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = d.$$

## Satz 226 (Forts.)

*Gelten diese Bedingungen, so sind für eine Folge* $(f_n)_{n\geq 0}$, *mit*

$$F(z) := \sum_{n\geq 0} f_n z^n$$

*der zugehörigen Erzeugendenfunktion, die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. **Lineare Rekursion:** *($d$ ist die Ordnung der Rekursion)*

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + q_2 \cdot f_{n+d-2} + \ldots + q_d \cdot f_n = 0\right]$$

2. **Erzeugende Funktion:**

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

*für ein Polynom* $p(z)$ *vom Grad* $< d$.

## Satz 226 (Forts.)

3. **Partialbruchzerlegung:** *Es gibt Polynome* $g_i$, $\deg(g_i) < d_i$ *für* $i = 1, \ldots, k$, *so dass*

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}}$$

4. **Explizite Darstellung:** *Es gibt Polynome* $p_i$, $\deg(p_i) < d_i$, *so dass*

$$(\forall n \geq 0)\left[f_n = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \cdot {\alpha_i}^n\right]$$

## Beweis:

Betrachte die komplexen Vektorräume

$$V_k = \{(f_n)_{n\geq 0} : (f_n)_{n\geq 0} \text{ erfüllt Eigenschaft } k\}$$

mit $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\dim(V_1) &= d \\
\dim(V_2) &= d \ (p \text{ hat } d \text{ frei wählbare Koeffizienten}) \\
\dim(V_3) &= \sum_{i=1}^{k} d_i = d \ (g_i \text{ hat } d_i \text{ frei wählbare Koeffizienten}) \\
\dim(V_4) &= \sum_{i=1}^{k} d_i = d \ (p_i \text{ hat } d_i \text{ frei wählbare Koeffizienten})
\end{aligned}$$

Um zu zeigen $V_i = V_j$, genügt es daher, $V_i \subseteq V_j$ zu zeigen.

## Beweis (Forts.):

- $V_1 = V_2$: Sei $(f_n)_{n\geq 0} \in V_2$. Wir wissen, dass

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} f_n \cdot z^n = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Es ist

$$\tilde{F}(z) = (1 + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots + q_d z^d) \cdot \sum_{n\geq 0} f_n z^n = p(z)$$

mit $\deg(p) \leq d-1$, also $[z^{d+n}]p(z) = 0$ für alle $n \geq 0$. Betrachte für $n \geq 0$

$$[z^{d+n}]\tilde{F}(z) = f_{n+d} + f_{n+d-1}q_1 + \ldots + f_n q_d = 0\ .$$

Damit gilt, dass

$$\left(f_n\right)_{n\geq 0} \in V_1,$$

also $V_2 \subseteq V_1$, und damit $V_1 = V_2$.

## Beweis (Forts.):

- $V_2 = V_3$: Sei $\left(f_n\right)_{n\geq 0} \in V_3$, also

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}}.$$

Zu zeigen ist, dass

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Betrachte hierzu

$$\prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_i z)^{d_i}.$$

Wir wissen, dass

$$q^R(z) = \prod_{i=1}^{k} (z-\alpha_i)^{d_i}\ .$$

## Beweis (Forts.):

Weiter gilt, dass

$$q^R(z) = z^d \cdot q(\frac{1}{z}),$$

also

$$\begin{aligned} q(z) = \left(q^R(z)\right)^R &= \left(\prod_{i=1}^{k}(z-\alpha_i)^{d_i}\right)^R \\ &= z^d \cdot \prod_{i=1}^{k}(\frac{1}{z}-\alpha_i)^{d_i} \\ &= \prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_i z)^{d_i} \ . \end{aligned}$$

## Beweis (Forts.):

Daraus erhält man (durch Bilden des Hauptnenners)

$$F(z) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left( g_i(z) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (1 - \alpha_j z)^{d_j} \right)}{\prod_{i=1}^{k} (1 - \alpha_i z)^{d_i}} = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Es ist damit

$$\deg\bigl(p(z)\bigr) < d_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} d_j = d,$$

also $V_3 \subseteq V_2$ und damit $V_2 = V_3$.

- $V_3 = V_4$: Sei
$$\left(f_n\right)_{n\geq 0} \in V_3.$$
Zu zeigen ist, dass
$$\left(f_n\right)_{n\geq 0} \in V_4.$$
Es gilt, dass
$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} \qquad \deg\big(g_i(z)\big) < d_i\ .$$
Aus Satz 222 (5) (Folie 371) wissen wir, dass
$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{n\geq 0} \binom{c+n-1}{n} \cdot x^n.$$

Damit gilt, dass

$$\frac{1}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{n\geq 0} \binom{d_i+n-1}{n} \cdot (\alpha_i z)^n$$
$$= \sum_{n\geq 0} \binom{d_i+n-1}{n} \cdot {\alpha_i}^n z^n \,.$$

## Beweis (Forts.):

Mit

$$g_i(z) = g_{i,0} + g_{i,1}z + \ldots + g_{i,d_i-1}z^{d_i-1} = \sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j}z^j$$

gilt:

$$\frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j}\cdot\binom{d_i+n-j-1}{n-j}\cdot {\alpha_i}^{n-j}\right)\cdot z^n$$

## Beweis (Forts.):

Also gilt auch, dass

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left( \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\sum_{j=0}^{d_i-1} {\alpha_i}^{-j} \cdot g_{i,j} \cdot \binom{n+d_i-j-1}{d_i-1}}_{p_i(n)} \cdot {\alpha_i}^{n} \right) \cdot z^n$$

Betrachte nun

$$f_n = [z^n]F(z) = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \cdot {\alpha_i}^n \,.$$

Es gilt, dass $\deg\big(p_i(n)\big) \leq d_i - 1$, und damit ist auch $\big(f_n\big)_{n\geq 0} \in V_4$, also $V_3 = V_4$. $\square$

**Anwendung:** Sei eine homogene Rekursion gegeben, z. B.

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad F_0 = 0, F_1 = 1$$

1. Drücke die Rekursion in einer einzigen Formel aus, inklusive der Anfangsbedingungen. Wie immer ist $F_n = 0$ für $n < 0$. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ gilt auch für $n = 0$, aber für $n = 1$ ist $F_1 = 1$, die rechte Seite jedoch $0$. Also ist die vollständige Rekursion

   $$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + \delta_{n,1},$$

   mit

   $$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Interpretiere die Gleichung aus 1. mit Hilfe von erzeugenden Funktionen. Wir wissen schon, dass Indexerniedrigung einer Multiplikation mit einer Potenz von $z$ entspricht. Also erhalten wir:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n z^n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_{n-1} z^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_{n-2} z^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{n,1} z^n \\ &= z \cdot F(z) + z^2 \cdot F(z) + z \end{aligned}$$

3. Löse die Gleichung in $F(z)$. Das ist leicht:

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

4. Drücke die rechte Seite als formale Reihe aus und ermittle daraus die Koeffizienten. Dies ist der schwierigste Schritt. Zunächst schreiben wir $1 - z - z^2$ in der Form $1 - z - z^2 = (1 - \alpha z)(1 - \beta z)$ und ermitteln dann durch Partialbruchzerlegung die Konstanten $a$ und $b$, so dass gilt:

$$\frac{1}{(1 - \alpha z)(1 - \beta z)} = \frac{a}{1 - \alpha z} + \frac{b}{1 - \beta z} .$$

Es ergibt sich z.B.

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \qquad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Es gilt:

$$F(z) = z\left(\frac{a}{1-\alpha z} + \frac{b}{1-\beta z}\right)$$
$$= z\left(a\sum_{n\geq 0}\alpha^n z^n + b\sum_{n\geq 0}\beta^n z^n\right)$$
$$= \sum_{n\geq 1}(a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1})z^n$$

und somit

$$F_n = a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),$$

nachdem man die Konstanten $a$ und $b$ etwa aus den Gleichungen für $F_0$ und $F_1$ bestimmt hat.