WS 2011/12

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Mayr)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2011WS/ds/uebung/

8. Februar 2012

ZÜ XIV

Übersicht:

1. Übungsbetrieb: Klausur am 18. Februar

   Termin, Ort, Anmeldung, Ablauf, Code

2. Ergebnisse: Zusatzaufgabe Blatt 9
   Kurzreferate

3. Vorbereitung: TA Blatt 14

1. Übungsbetrieb: Klausur am 18. Februar

1.1 Termin und Ort

Zeit:	Samstag, 18. Februar, 14 – 17 Uhr
Ort:	Hörsäle MW 0001, MW 2001, MW 1801 MI HS1, Interim HS1, Physik HS1, N.N.

Bitte mindestens 15 Minuten vor Beginn im Hörsaal erscheinen!

Platzverteilung:
Die Zuordnung der Teilnehmer auf die Hörsäle erfolgt nach Abschnitten des Alphabets siehe Übungswebseite ab 15. Februar.

Die Verteilung auf Sitzplätze sind den Listen zu entnehmen, die an den Hörsaaleingängen aushängen werden.

1.2 Anmeldung

Eine Anmeldung für die Endterm
erfolgt über TUMonline oder in Sonderfällen persönlich am Infopoint.

Diejenigen Teilnehmer,
die sich nicht über TUMonline angemeldet hatten,
besorgen ihre Anmeldung bitte
spätestens bis zum 21.2.
persönlich im Infopoint.

Grundsätzlich bei Nichtanmeldung:
Bitte im Hörsaal bei der Aufsicht melden!

Achtung:

Bei Nichtanmeldung kann nicht garantiert werden, dass Sitzplatz und Klausurunterlagen zur Verfügung stehen!

Alle Teilnehmer der Klausuren müssen sich bei der Ausweiskontrolle im Hörsaal ausweisen können!!

1.3 Ablauf

Es nicht erlaubt, Unterlagen zu benutzen,
außer
einem persönlich handbeschriebenen DIN A4 Blatt (beidseitig)

Fragen während der Klausur sind erlaubt,
aber
Antworten werden, falls notwendig,
nur als Hörsaalansage gegeben.

1.4 Code

Auf dem Deckblatt der Klausurangabe finden Sie 8 Kästchen in die Sie einen Code mit 8 Ziffern schreiben können

Mit diesem Code können Ihre Ergebnisse schnell und Datenschutzrechtlich sicher veröffentlicht werden.

Bitte notieren Sie Ihren Code als Gedächtnisstütze!!!

2. Ergebnis Zusatzaufgabe Blatt 9

Die Bearbeitung der Zusatzaufgabe Blatt 9 wird in den folgenden Kurzreferaten präsentiert.

2.1 Kurzreferate

Referat 1: N.N.:

Referat 2: Julian Müller:

3. Vorbereitung TA Blatt 14

3.1 VA 1

Wir untersuchen den vollständigen bipartiten Graph $K_{3,3}$.

1. Geben Sie 2 Unterteilungen des $K_{3,3}$ mit 7 bzw. 8 Knoten an.
2. Man beweise: Entfernt man aus dem $K_{3,3}$ eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph planar.

Ein *vollständiger bipartiter Graph* $K_{m,n}$ für $m, n \in \mathbb{N}$ ist ein bipartiter Graph mit Knotenmenge $V = V_1 \cup V_2$ und Kantenmenge $E = \{\{a, b\}\,;\, a \in V_1, b \in V_2\}$, wobei V_1 und V_2 disjunkt sind mit $m = |V_1|$ und $n = |V_2|$ Elementen.

Da ein $K_{m,n}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, sprechen wir gelegentlich auch von „dem" Graphen $K_{m,n}$.

1. Geben Sie 2 Unterteilungen des $K_{3,3}$ mit 7 bzw. 8 Knoten an.

Lösung:

Unterteilt man einen Graph $G = (V, E)$, dann ersetzt man eine oder mehrere Kanten $e \in E$ durch jeweils einen neuen Pfad.

Die Zwischenknoten und die Kanten des Pfades sind neu, d. h., nicht schon in G enthalten.

Die ersetzte Kante verschwindet.

Den dabei entstehenden Graph $G' = (V', E')$ nennt man Unterteilung von G. Es gilt dann $e \notin E'$.

Jede Unterteilung G'' von G' ist auch eine Unterteilung von G, wobei G kein Teilgraph ist von G' oder G''.

Sei $e = \{a, b\}$ eine Kante von $(V, E) = K_{3,3}$.

Wir entfernen e aus E und fügen einen neuen Knoten $x \notin V$ zu V und 2 Kanten $\{a, x\}, \{b, x\}$ zu E.

Der erhaltene Graph

$$G' = (V \cup \{x\}\, ,\, (E \setminus \{e\}) \cup \{\{a, x\}, \{b, x\}\})$$

ist eine Unterteilung von G mit 7 Knoten.

Es gibt grundsätzlich 2 verschiedene Vorgehensweisen, aus $(V, E) = K_{3,3}$ eine Unterteilung mit 8 Knoten zu erhalten.

(i) Man ersetzt eine Kante $e \in E$ durch einen neuen Pfad der Länge 4 (also mit 2 neuen Knoten).

(ii) Man ersetzt zwei Kanten $e, f \in E$ durch je einen neuen Pfad der Länge 3 (also mit je 1 neuen Knoten).

2. Man beweise: Entfernt man aus dem $K_{3,3}$ eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph planar.

Lösung:

Entfernt man aus dem $K_{3,3}$ eine Kante, dann kann der resultierende Graph R natürlich keine Unterteilung des $K_{3,3}$ mehr enthalten, weil die Anzahl der Kanten dann zu gering ist.

Aber auch eine Unterteilung des K_5 kann nicht mehr in R enthalten sein, weil der K_5 ja 10 Kanten enthält und jede Unterteilung von K_5 mehr als 10 Kanten enthalten müsste.

R ist also nach dem Satz von Kuratowski planar.

3.2 VA 2

Beweisen oder widerlegen Sie:

1. In jedem nichtleeren planaren Graph gibt es einen Knoten der höchstens Grad 5 hat.
2. Es gibt einen 5-regulären planaren Graph.

Wir beweisen:

1. In jedem nichtleeren planaren Graph gibt es einen Knoten der höchstens Grad 5 hat.

Lösung:

Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph. Dann haben wir zu zeigen, dass ein Knoten x mit $deg(x) \leq 5$ existiert.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis, indem wir annehmen, dass alle Knoten aus V mindestens den Grad 6 besitzen, d. h. $deg(x) \geq 6$ gilt, und diese Annahme zum Widerspruch führen.

Sei also $deg(x) \geq 6$ für alle $x \in V$.

Es folgt zunächst $|V| \geq 3$.

Die Summe aller Gradzahlen von Knoten in G ist gleich dem Doppelten der Anzahl der Kanten, d. h. es gilt

$$\sum_{x \in V} deg(x) = 2 \cdot |E|\,.$$

Mithin gilt

$$2 \cdot |E| = \sum_{x \in V} deg(x) \geq |V| \cdot 6\,, \quad \text{d. h.} \quad |E| \geq 3|V|\,.$$

Andrerseits gilt für planare Graphen mit mindestens 3 Knoten nach einem Satz über planare Graphen (siehe Buch von Steger)

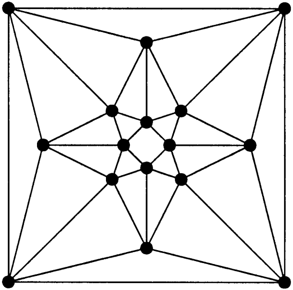
$$|E| \leq 3 \cdot |V| - 6 < 3 \cdot |V|\,.$$

Widerspruch!

Wir beweisen:

2. Es gibt einen 5-regulären planaren Graph.

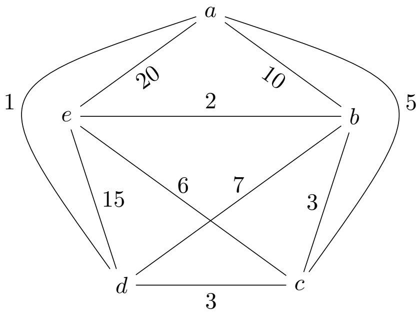
Lösung:



3.3 VA 3

Sei $V = \{a, b, c, d, e\}$. Wir betrachten einen vollständigen Graph $G = (V, E)$ mit Kanten, deren ganzzahlige Gewichte durch die folgende Tabelle definiert sind.

	a	b	c	d	e
a	.	10	5	1	20
b		.	3	7	2
c			.	3	6
d				.	15



1. Berechnen Sie mit Hilfe des Algorithmus nach Dijkstra die Entfernung des Knotens a zu allen anderen 4 Knoten von G!
2. In welcher Reihenfolge werden die Entfernungen nach Dijkstra berechnet? Das heißt, in welcher Reihenfolge werden die Knoten aus F entfernt?
   Protokollieren Sie Ihre Berechnungen geeignet!
3. Welcher Pfad verbindet den Knoten a mit Knoten e mit minimaler Gewichtesumme?

Erinnerung: In einem kantengewichteten Graphen ist das Gewicht eines Weges die Summe seiner Kantengewichte. Die Entfernung zwischen zwei Knoten u und v ist dann das minimale Gewicht eines Weges zwischen u und v.

Lösung:

Mit dem Algorithmus von Dijkstra berechnet man sukzessive die Entfernungen $u_1, u_2, \ldots$ vom Startknoten s aus zu Knoten $k_1, k_2, \ldots$ beginnend bei dem zum Startknoten nächststehenden Knoten.

	a	b	c	d	e
a	.	~~10~~	~~5~~	$\underline{1}$	~~20~~
		~~8~~	$\underline{4}$		~~16~~
		$\underline{7}$			~~10~~
					$\underline{9}$
b	$u_3 = 7$	.	3	7	2
c	$u_2 = 4$		.	3	6
d	$u_1 = 1$			.	15
e	$u_4 = 9$				.

Viel Erfolg bei der Endterm!