Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2011/12
Abschlussklausur
18. Februar 2012

Diskrete Strukturen

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
....	....	....	....

Code:

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 180 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......

Vorzeitig abgegeben um ......

Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	Σ	Korrektor
Erstkorrektur											
Zweitkorrektur											

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. $E\nabla^2 = \Delta - \nabla$.
2. Es gibt unendlich viele paarweise nicht isomorphe 2-elementige Gruppen.
3. Der berühmte Mathematiker Leonhard Euler lebte im 17. Jahrhundert.
4. $(-2)^{1001} \bmod 5 = 2$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

1. Seien a, b, c aussagenlogische Variablen. Wir betrachten die Formel

$$F \;=\; a \Rightarrow (\neg b \vee \neg c)\,.$$

   Geben Sie eine zu F äquivalente Formel G in vollständiger konjunktiver Normalform (Konjunktion von Volldisjunktionen) an.

2. Zeigen Sie, dass für alle Mengen A, B, C die folgende Gleichung gilt:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)\,.$$

3. Wir nennen eine Relation $R \subseteq M \times M$ auf einer Menge M total, falls gilt

$$(\forall x, y \in M)\ [\,(x, y) \in R \vee (y, x) \in R\,]\,.$$

   Sind alle in diesem Sinne totalen Relationen transitiv? Beweisen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Wir nehmen an, dass in der ersten Sitzreihe in einem Theatersaal nie zwei unmittelbar nebeneinander befindliche Sitzplätze besetzt werden dürfen. Der äußerste linke bzw. rechte Sitzplatz darf ebenfalls nicht besetzt werden. k Personen können also nicht auf n Sitzplätze der ersten Reihe verteilt werden, wenn $n < 2k+1$ gilt.
Bei Platzverteilungen ist außerdem zu beachten, welche Person welchen Sitzplatz zugewiesen bekommt. Sitzplätze und Personen sind also unterscheidbar, entsprechend gibt es unterschiedliche Platzverteilungen.

1. Seien $n = 6$ und $k = 2$. Wie viele Platzverteilungen der ersten Reihe gibt es?

2. Seien nun $k \geq 1$ und $n \geq 2k+1$. Geben Sie mit Hilfe bekannter Zählfunktionen der Kombinatorik eine geschlossene Formel für die Anzahl der Möglichkeiten an, k Personen auf n Sitzplätze der ersten Reihe zu verteilen.

   Überprüfen Sie Ihre Formel durch Anwendung auf Teilaufgabe 1!

   Wie viele Sitzplatzverteilungen gibt es für den Fall, dass die Personen nicht unterscheidbar sind?

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Wir betrachten den Polynomring $R = \mathbb{Z}_{11}[x]$ aller Polynome über dem Körper $\mathbb{Z}_{11}$ und der Unbestimmten x. Seien $p = \sum_{i=0}^{10} x^i$ und $q = x^2 + 1$ Polynome aus R.

1. Bestimmen Sie den Rest $r(x)$ bei Division von p durch q.
2. Zeigen Sie, dass der Restklassenring $\mathbb{Z}_{11}[x]/(p)$ <u>kein</u> Körper ist.
3. Zeigen Sie, dass der Restklassenring $\mathbb{Z}_{11}[x]/(q)$ ein Körper ist.
4. Bestimmen Sie im Körper $\mathbb{Z}_{11}[x]/(q)$ zu jedem Polynom $ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}_{11}$ und $a^2 + b^2 \neq 0$ das inverse Polynom $cx + d$ mit $c, d \in \mathbb{Z}_{11}$, d. h., dass gilt:

$$(ax + b) \cdot_q (cx + d) = 1 \,.$$

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Sei $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom vom Grad 7 mit den Koeffizienten $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_7)$, d. h. $p(x) = P_{\vec{a}}(x)$. a_i ist Koeffizient von x^i. Sei $\omega = e^{\frac{2\pi i}{8}}$, d. h. $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$.
In der Ausführung des Divide-and-Conquer Algorithmus $\texttt{DFT}(\vec{a}, \omega)$ werden im ersten rekursiven Aufruf die Fouriertransformierten $\mathcal{F}_{4,\omega'}(\vec{a}_g)$ bzw. $\mathcal{F}_{4,\omega'}(\vec{a}_u)$ zu den Polynomen $P_{\vec{a}_g}$ bzw. $P_{\vec{a}_u}$ der geraden bzw. ungeraden Koeffizienten von p mit $\omega' = \omega^2 = i$ bestimmt.

1. Seien $\mathcal{F}_{4,\omega'}(\vec{a}_g) = \mathcal{F}_{4,\omega'}(\vec{a}_u) = (1, \sqrt{2}, 1, \sqrt{2})$.

   Berechnen Sie $\mathcal{F}_{8,\omega}(\vec{a}) = (e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$!

2. Sei $\vec{a}_g = (1, 2, 3, 4)$.

   Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\mathcal{F}_{4,\omega'}(\vec{a}_g)$ durch Ausführung des Divide-and-Conquer Algorithmus $\texttt{DFT}(\vec{a}_g, \omega')$ mit $\omega' = \omega^2$.

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Wir betrachten Bäume $T = (V, E)$ mit $V = [n] \subset \mathbb{N}$.

1. Berechnen Sie den Prüfer-Code eines Baumes mit Gradfolge $4, 4, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1$, wobei die Knoten 1 und 2 den Grad 4 und der Knoten 3 den Grad 2 haben sollen. Die Blätter $4, 5, 6$ bzw. $7, 8, 9$ sollen an den Knoten 1 bzw. 2 hängen.

2. Geben Sie zeichnerisch (und übersichtlich, mit Knotenmarkierung) den Baum an, der durch den Prüfer-Code $(4, 3, 2, 1, 2, 3, 4)$ gegeben ist .

   Geben Sie eine knappe Beschreibung der Bäume an, die einen Prüfer-Code $(k, k-1, \ldots, 2, 1, 2, \ldots, k-1, k)$ (Palindrom) mit $k \geq 2$ besitzen.

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Wir nehmen an, dass für zwei komplexwertige Folgen $(f_n)_{n\geq 0}$ und $(g_n)_{n\geq 0}$ die folgenden Rekursionsgleichungen mit dem Parameter $\alpha \in \mathbb{C}$ gelten:

$$f_{n+1} - \alpha f_n = g_n \quad \text{und} \quad g_{n+1} + 9g_n = 0 \quad \forall n \geq 0\,. \tag{1}$$

1. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\geq 0}$ eine lineare Rekursionsgleichung der Ordnung 2 mit Koeffizienten $q_1, q_2 \in \mathbb{C}$

   $$f_{n+2} + q_1 f_{n+1} + q_2 f_n = 0, \quad \forall n \geq 0 \tag{2}$$

   erfüllt, deren charakteristisches Polynom die Nullstellen α und -9 besitzt.

2. Für welchen Wert von α ist $(f_n)_{n\geq 0}$ mit

   $$f_n = (3n+1)(-9)^n, \ \forall n \geq 0$$

   eine Lösung der Gleichung (2)? Begründen Sie Ihre Antwort!

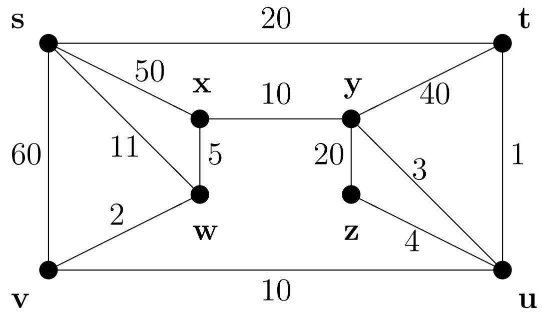
3. Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für die erzeugende Funktion F der Funktion $f_n = (3n+1)(-9)^n$ für alle $n \geq 0$ in der Form

   $$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

   mit Polynomen $p(z)$ und $q(z)$ höchstens vom Grad 2.

Aufgabe 8 (7 Punkte)

Wir betrachten den folgenden Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{\mathrm{s}, \mathrm{t}, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\}$, dessen Kanten mit ganzzahligen Längen gewichtet sind:



1. Berechnen Sie mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus die Entfernung $d(\mathrm{s}, \mathrm{z})$ zwischen den Knoten s und z (s Startknoten!).
   Protokollieren Sie dabei die auftretenden Zwischenergebnisse durch Einträge in eine geeignete Tabelle, so dass Ihr Berechnungsweg sichtbar wird.

2. Bestimmen Sie mit Hilfe des Algorithmus von Kruskal die Kantenmenge eines, bezüglich der Summe der Gewichte, minimalen Spannbaums von G. Machen Sie Ihren Berechnungsweg deutlich.

Aufgabe 9 (6 Punkte)

Einen zusammenhängenden einfachen Graph $G = (V, E)$ nennen wir kreisförmig, falls G **genau einen** Teilgraph $T = (K, S)$ mit $K \subseteq V$, $S \subseteq E$ und $|K| \geq 3$ enthält, der ein einfacher Kreis ist. Diesen Kreis nennen wir Basiskreis von G. Ein Basiskreis ist stets ein C_n mit $n \geq 3$.

1. Sei $G = (V, E)$ kreisförmig. Man zeige: $|V| = |E|$.
2. Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender einfacher Graph, so dass $|V| = |E|$ gilt mit $|V| \geq 3$. Man zeige: G ist kreisförmig.
3. Sei $G = (V, E)$ kreisförmig. Man zeige: G ist planar (d. h., kann kreuzungsfrei in der Ebene eingebettet werden).
