Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2011/12
Wiederholungsklausur
10. April 2012

Diskrete Strukturen

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
....	....	....	....

Code:

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 180 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......

Vorzeitig abgegeben um ......

Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	Σ	Korrektor
Erstkorrektur											
Zweitkorrektur											

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Sei S die dreielementige Teilmenge der ganzen Zahlen mit $S = \{0, 1, 2\}$. Die Algebra $\langle S, \odot \rangle$ mit $\odot(x, y) = |x - y|$ für alle $x, y \in S$ ist eine Gruppe.

2. Die Anzahl der Permutationen der Zahlenmenge $[6]$ mit 5 Zyklen ist 30.

3. Es gibt einen bipartiten Graph mit Gradfolge $3, 3, 2, 2, 2, 2$.

Für die richtige Antwort und für die richtige Begründung einer Teilaufgabe gibt es jeweils einen Punkt.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Wir betrachten die Menge F aller Abbildungen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie für alle $f, g \in F$ mit der folgenden Eigenschaft

   $$(\forall c > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0)\ [\,|f(n)| > c \cdot g(n)\,]\,,$$

   dass $f(n) \in O(g(n))$ <u>nicht</u> gilt.

2. Wir betrachten eine Binärrelation $\lhd \subseteq F \times F$, die wie folgt für alle $f, g \in F$ definiert ist: g <u>dominiert</u> f, i. Z. $f \lhd g$, genau dann, wenn gilt

   $$(\forall n\ \exists n')\ [f(n) \leq g(n')]\,.$$

   - Geben Sie Funktionen $f, g \in F$ an, so dass $f \lhd g$ gilt und $g \lhd f$ <u>nicht</u> gilt. Gibt es Funktionen $f, g \in F$, so dass weder $f \lhd g$ noch $g \lhd f$ gilt?
   - Zeigen Sie, dass $\lhd$ transitiv ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

1. Man zeige durch Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ die folgende Gleichung gilt:
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m}{k} \ = \ (-1)^n \binom{m-1}{n}. \tag{1}$$

2. Bestimmen Sie unter der Annahme, dass Gleichung (1) gilt, in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ alle Nullstellen des Polynoms
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^{\underline{k}}.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $M_n = [n] \times [n]$. Wir bezeichnen M_n als die Menge der Gitterpunkte mit ganzahligen Komponenten aus $[n]$. Wir definieren über M_n eine binäre Relation G_n zwischen „benachbarten“ Gitterpunkten durch $G_n = H_n \cup V_n$ mit

$$\begin{aligned} H_n &= \{\, (\,(x,y),(x{+}1,y)\,)\ ;\ x{\in}[n{-}1],\ y{\in}[n]\,\} && \text{(horizontal benachbart)}\,, \\ V_n &= \{\, (\,(x,y),(x,y{+}1)\,)\ ;\ x{\in}[n],\ y{\in}[n{-}1]\,\} && \text{(vertikal benachbart)}\,. \end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der transitiven Hülle von G_3. Begründen Sie Ihr Ergebnis!

2. Wir betrachten die Komposition $G_3^3 = (G_3 \circ G_3) \circ G_3$ der Relation G_3.

   Wie viele Elemente enthält G_3^3? Begründung!

   Geben Sie ein Hasse-Diagramm der reflexiven transitiven Hülle von G_3^3 an! Begründung!

Aufgabe 5 (6 Punkte)

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1) \cdot 3^k \;=\; n \cdot 3^{n+1}\,. \tag{1}$$

   Wir fassen die linke bzw. rechte Seite der Gleichung (1) als reellwertige Funktionen $l(n) = \sum_{k=1}^{n}(2k+1) \cdot 3^k$ bzw. $r(n) = n \cdot 3^{n+1}$ über den natürlichen Zahlen auf.

   Beweisen Sie die Gleichung (1), indem Sie die Gleichungen $\Delta l(n) = \Delta r(n)$ und $l(1) = r(1)$ zeigen!

2. Berechnen Sie durch Anwendung Partieller Summation die Summe

$$\sum_{k=1}^{n} 2k^2 3^k$$

   als geschlossenen Ausdruck in Abhängigkeit von n.

   Hinweis: Beachten Sie die Darstellung $2k^2 3^k = f(k) \cdot \Delta g(k)$ für geeignete Funktionen f und g mit $g(k) = 3^k$ und verwenden Sie Gleichung (1).

Aufgabe 6 (9 Punkte)

Seien $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$. Sei $(g_n)_{n\geq 0}$ eine reellwertige Folge, die die folgende homogene Rekursionsgleichung zweiter Ordnung erfüllt:

$$g_{n+2} + q_1 g_{n+1} + q_2 g_n = 0\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{1}$$

1. Ausgehend von der Folge $(g_n)_{n\geq 0}$ definieren wir eine Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ mit $f_0 = 0$ und Summenbildung $f_n = \sum_{k=0}^{n-1} g_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Zeigen Sie durch direkte Rechnung, dass $(f_n)_{n\geq 0}$ die folgende Rekursionsgleichung erfüllt:

   $$f_{n+3} + (q_1 - 1) f_{n+2} + (q_2 - q_1) f_{n+1} - q_2 f_n = 0\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{2}$$

2. Zeigen Sie, dass 1 eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Gleichung (2) ist.

   Zeigen Sie, dass jede Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Gleichung (1) auch Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Gleichung (2) ist.

3. Zeigen Sie, dass es Parameter c_0, c_1, c_2 gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

   $$\sum_{k=0}^{n-1} k \cdot 5^k \;=\; (c_2 n + c_1) \cdot 5^n \;+\; c_0\,. \tag{3}$$

   Sie dürfen dabei die Teilaufgaben 1 und 2 als bewiesen annehmen.

Aufgabe 7 (7 Punkte)

Wir betrachten die Zeichenmengen $A = \{a, b\}$, $X = \{x, y\}$.
Wie viele Wörter w über $Z = A \cup X$ der Länge $|w| = 6$ gibt es,

1. so dass in w jedes Zeichen aus Z mindestens einmal vorkommt? (Beispiel: $w = xxxbay$)
2. so dass in w von links beginnend zunächst 3 Mal Buchstaben aus A vorkommen gefolgt von 3 Mal Buchstaben aus X? (Beispiel: $w = baayyy$)
3. so dass es in w jeweils 3 Vorkommen von Buchstaben aus A und 3 Vorkommen von Buchstaben aus X gibt? (Beispiel: $w = bxxbax$)

Bekannte Zählfunktionen der Kombinatorik dürfen unausgewertet verwendet werden.

Aufgabe 8 (7 Punkte)

Sei $R = \mathbb{Z}_2[x]$ der Ring aller Polynome über dem Körper $\mathbb{Z}_2$ und der Unbestimmten x. Sei $p \in R$ mit $p(x) = x^6 + x^4 + 1$.

1. Bestimmen Sie durch Ausführung des Divisionsalgorithmus den Rest $r(x)$ bei Division von p durch $q(x) = x^2 + x + 1$. (Hinweis: $r(x) \neq 0$)

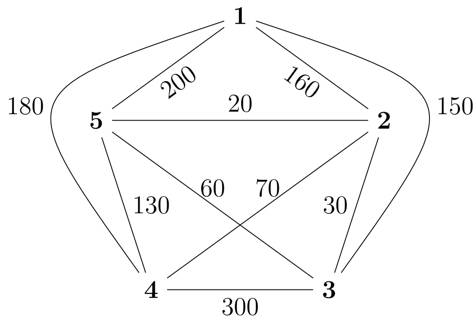
2. Zeigen Sie, dass p reduzibel ist.

3. Wie viele Elemente enthält der Restklassenring $\mathbb{Z}_2[x]/(p)$? Begründung!

Aufgabe 9 (6 Punkte)

Sei $V = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$. Wir betrachten einen vollständigen Graph $G = (V, E)$ mit Kanten, deren ganzzahlige Gewichte durch die folgende Tabelle definiert sind.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	.	160	150	180	200
2		.	30	70	20
3			.	300	60
4				.	130



1. Bestimmen Sie die Summe der Kantengewichte des Spannbaums (Hörsaalansage: von G) mit dem Prüfer-Code $(5, 5, 3)$.
2. Bestimmen Sie mit Hilfe des Algorithmus von Kruskal einen Spannbaum von G, der eine minimale Summe der Kantengewichte besitzt.
3. Bestimmen Sie denjenigen planaren Teilgraph von G, der die größte Summe der Kantengewichte unter allen möglichen planaren Teilgraphen von G besitzt.