4. Mathematische und notationelle Grundlagen

4.1 Mengen

Beispiel 3

$$A_1 = \{2, 4, 6, 8\};$$
$$A_2 = \{0, 2, 4, 6, \ldots\} = \{n \in \mathbb{N}_0; n \text{ gerade}\}$$

Bezeichnungen:

$x \in A \Leftrightarrow A \ni x$	x Element A
$x \notin A$	x nicht Element A
$B \subseteq A$	B Teilmenge von A
$B \subsetneq A$	B echte Teilmenge von A
$\emptyset$	leere Menge, dagegen:
$\{\emptyset\}$	Menge mit leerer Menge als Element

Spezielle Mengen:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} =$ Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q} =$ Menge der Brüche (rationalen Zahlen)
- $\mathbb{R} =$ Menge der reellen Zahlen
- $\mathbb{C} =$ Menge der komplexen Zahlen
- $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ Restklassen bei Division durch n
- $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$

Operationen auf Mengen:

- $|A|$ Kardinalität der Menge A
- $A \cup B$ Vereinigungsmenge
- $A \cap B$ Schnittmenge
- $A \setminus B$ Differenzmenge
- $A \vartriangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ symmetrische Differenz
- $A \times B := \{(a, b); a \in A, b \in B\}$ kartesisches Produkt
- $A \uplus B$ Disjunkte Vereinigung: die Elemente werden nach ihrer Herkunft unterschiedlich gekennzeichnet
- $\bigcup_{i=0}^{n} A_i$ Vereinigung der Mengen $A_0, A_1, \ldots, A_n$
- $\bigcap_{i \in I} A_i$ Schnittmenge der Mengen A_i mit $i \in I$
- $\mathrm{P}(M) := 2^M := \{N; N \subseteq M\}$ Potenzmenge der Menge M

Beispiel 4

Für $M = \{a, b, c, d\}$ ist

$$\begin{array}{rcl} P(M) & = & \{ \quad \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \\ & & \qquad \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \\ & & \qquad \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \\ & & \qquad \{a,b,c,d\} \\ & & \} \end{array}$$

Satz 5

Die Menge M habe n Elemente, $n \in \mathbb{N}$. Dann hat $P(M)$ 2^n Elemente!

Beweis:

Sei $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Um eine Menge $L \in P(M)$ (d.h. $L \subseteq M$) festzulegen, haben wir für jedes $i \in [n]$ die (unabhängige) Wahl, a_i zu L hinzuzufügen oder nicht. Damit ergeben sich $2^{|[n]|} = 2^n$ verschiedene Möglichkeiten. $\square$

Bemerkungen:

1. Der obige Satz gilt auch für $n = 0$, also die leere Menge $M = \emptyset$.
2. Die leere Menge ist in jeder Menge als Teilmenge enthalten.
3. $P(\emptyset)$ enthält als Element genau $\emptyset$ (also $P(\emptyset) \neq \emptyset$).

4.2 Relationen und Abbildungen

Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Mengen. Eine Relation über $A_1, \ldots, A_n$ ist eine Teilmenge

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \bigtimes_{i=1}^{n} A_i$$

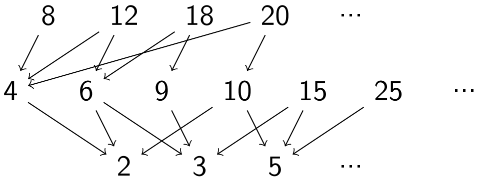
Andere Schreibweise (Infixnotation) für $(a, b) \in R$: aRb.

Eigenschaften von Relationen ($R \subseteq A \times A$):

- reflexiv: $(a, a) \in R \quad \forall a \in A$
- symmetrisch: $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R \quad \forall a, b \in A$
- asymmetrisch: $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R \quad \forall a, b \in A$
- antisymmetrisch: $\big[(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R\big] \Rightarrow a = b \quad \forall a, b \in A$
- transitiv: $\big[(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R\big] \Rightarrow (a, c) \in R \quad \forall a, b, c \in A$
- Äquivalenzrelation: reflexiv, symmetrisch und transitiv
- Partielle Ordnung (aka *partially ordered set*, *poset*): reflexiv, antisymmetrisch und transitiv

Beispiel 6

$(a, b) \in R$ sei $a|b$ „a teilt b“, $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
Die graphische Darstellung ohne reflexive und transitive Kanten heißt Hasse-Diagramm:



Im Diagramm wird $a|b$ durch einen Pfeil $b \longrightarrow a$ dargestellt.
Die Relation $|$ stellt eine *partielle Ordnung* dar.

Definition 7

Sei $R \subseteq A \times B$ eine binäre Relation. Dann heißt

$$\{a \in A;\ (\exists b \in B)[(a,b) \in R]\}$$

das Urbild der Relation R und

$$\{b \in B;\ (\exists a \in A)[(a,b) \in R]\}$$

das Bild der Relation R.

Definition 8

Sei $R \subseteq A \times B$ eine binäre Relation. Dann heißt

$$R^{-1} := \{(b,a);\ (a,b) \in R\}$$

die inverse (oder auch konverse) Relation zu R.

Definition 9

Seien $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ binäre Relationen. Dann heißt

$$R \circ S := \{(a, c) \in A \times C;\ (\exists b \in B)[(a, b) \in R \text{ und } (b, c) \in S]\}$$

das Produkt der Relationen R und S. Es wird oft auch einfach durch RS bezeichnet.

Satz 10

Das Relationenprodukt $\circ$ ist

- *assoziativ,*
- *distributiv über $\cup$,*
- *i.a. nicht distributiv über $\cap$.*

Beweis:

Hausaufgabe! □

Bemerkungen zur Notation

Wir haben gerade die Symbole

- $\forall$ "für alle" und
- $\exists$ "es gibt"

gebraucht. Dies sind so genannte logische Quantoren, und zwar der All- und der Existenzquantor.

Die Formel

$$\{a \in A;\ (\exists b \in B)[(a,b) \in R]\}$$

ist daher zu lesen als

> *Die Menge aller Elemente a aus der Menge A, für die es jeweils ein b aus der Menge B gibt, so dass das Paar (a,b) in der Menge/Relation R enthalten ist.*

Definition 11

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation. Dann ist

1. $R^0 := \{(a,a);\ a \in A\}$ $(=: \mathrm{Id}_A)$
2. $R^{n+1} := R^n \circ R$ für $n \in \mathbb{N}_0$

Beispiel 12

Sei Kind die Relation

$$\{(k,v);\ k \text{ ist Kind von } v\}$$

Dann bezeichnet Kind^2 die Enkel-Relation.

Definition 13

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation.

1. Dann ist der reflexive (symmetrische, transitive) Abschluss (auch als reflexive, symmetrische bzw. transitive Hülle bezeichnet) die kleinste (im mengentheoretischen Sinn) Relation, die R enthält und reflexiv (symmetrisch, transitiv) ist.
2. Die transitive Hülle von R wird oft mit R^+ bezeichnet.
3. Die reflexive transitive Hülle von R wird gewöhnlich mit R^* bezeichnet.

Beispiel 14

Die transitive Hülle der Relation „die Mutter von k ist m“ ist die Menge der Tupel (k', m'), so dass gilt:

$$k' \text{ hat seine Mitochondrien von } m' \text{ geerbt.}$$

4.3 Funktionen

Sei $f : A \to B$ eine *Funktion* von A nach B (also eine Relation mit genau einem Paar $\big(f(a), a\big) \quad \forall a \in A$).
(Eine solche Relation heißt auch rechtstotal und linkseindeutig.)

- Das *Urbild* von $b \in B$: $f^{-1}(b) = \{a \in A; f(a) = b\}$.
- Schreibweisen: $(A' \subseteq A, B' \subseteq B)$
  - $f(A') = \bigcup\limits_{a \in A'} \{f(a)\}$
  - $f^{-1}(B') = \bigcup\limits_{b \in B'} f^{-1}(b)$
- Sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen, so ist ihre Komposition $g \circ f$ gemäß der entsprechenden Definition für das Relationenprodukt definiert.

Bemerkungen:

Man beachte, dass wir für eine Funktion $f : A \to B$ die zugehörige Relation $\hat{f}$ als die Menge

$$\{(f(a), a) \; ; \; a \in A\}$$

definiert haben, also die Abbildung sozusagen von rechts nach links lesen.

Der Grund dafür ist, dass es in der Mathematik üblich ist, die Komposition (Hintereinanderausführung) einer Funktion g nach einer Funktion f (also $g \circ f$) so zu lesen:

$$g \text{ nach } f \, .$$

Dies liegt daran, dass man für die Anwendung einer Funktion f auf ein Argument x

$$f(x)$$

und für die Anwendung von g nach f auf x dementsprechend

$$g(f(x)) = g \circ f(x)$$

schreibt.

Bemerkung:
Für die zugehörigen Relationen gilt daher:

$$\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}\,.$$