

Eigenschaften von $f : A \rightarrow B$:

- f injektiv: $(\forall b \in B) \left[|f^{-1}(b)| \leq 1 \right]$
- f surjektiv: $(\forall b \in B) \left[|f^{-1}(b)| \geq 1 \right]$
- f bijektiv: $(\forall b \in B) \left[|f^{-1}(b)| = 1 \right]$, d.h. injektiv und surjektiv
- Ist $f : A \rightarrow B$ eine Bijektion, dann ist auch f^{-1} eine bijektive Funktion.

Eigenschaften von $f : A \rightarrow B$:

Existiert eine Bijektion von A nach B , haben A und B *gleiche Kardinalität*.

Warnung: Es gibt A, B mit $A \subsetneq B$, aber $|A| = |B|$!

Beispiel 15 ($|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}_0|$)

$$f : \mathbb{Z} \ni z \mapsto \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ -2z - 1 & z < 0 \end{cases} \in \mathbb{N}_0$$

Sei R eine Relation über A , \tilde{R} eine Relation über B .

- Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt **Homomorphismus** von R nach \tilde{R} , falls gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R \Rightarrow (f(a_1), \dots, f(a_k)) \in \tilde{R}$$

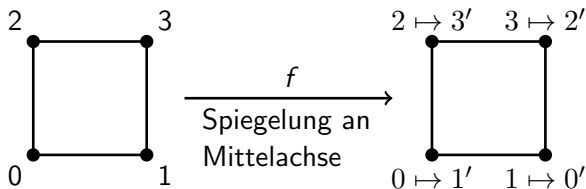
- Eine Bijektion $f : A \rightarrow B$ heißt **Isomorphismus** zwischen R und \tilde{R} , falls gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R \iff (f(a_1), \dots, f(a_k)) \in \tilde{R}$$

Beispiel 16

Relation: Die Kantenmenge $E = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ des Graphen mit der Knotenmenge $\{0, 1, 2, 3\}$

Funktion: Spiegelung der Knotenmenge wie gezeichnet an der Mittelachse



$$E' = \{\{0', 1'\}, \{1', 3'\}, \{0', 2'\}, \{2', 3'\}\}$$

f ist ein Isomorphismus bzgl. (der Relation) E .

Schreibweisen für wichtige Funktionen:

- $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $\mathbb{R} \ni x \mapsto \lfloor x \rfloor := \max\{y \in \mathbb{Z}; y \leq x\} \in \mathbb{Z}$
(„untere Gaußklammer“, „*floor*“, „*entier*“)
- $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $\mathbb{R} \ni x \mapsto \lceil x \rceil := \min\{y \in \mathbb{Z}; y \geq x\} \in \mathbb{Z}$
(„obere Gaußklammer“, „*ceiling*“)

Beispiel 17

$$\lfloor \pi \rfloor = 3, \lfloor -\pi \rfloor = -4, \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

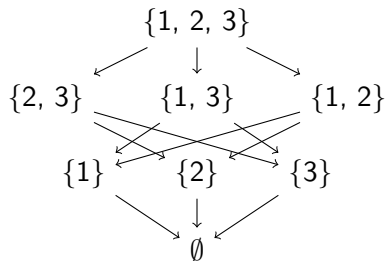
4.4 Partielle Ordnungen

Sei (S, \preceq) eine partielle Ordnung.

Beispiel 18

$S = P(A)$, $\preceq \equiv \subseteq$, $A = \{1, 2, 3\}$

Hassediagramm:



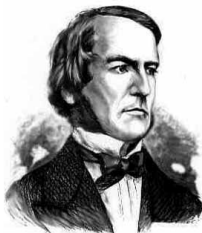
Eigenschaften partieller Ordnungen:

- $a, b \in S$ heißen **vergleichbar** (bzgl. \preceq), falls $a \preceq b$ oder $b \preceq a$, sonst **unvergleichbar**.
- Ein Element $a \in S$ heißt **minimal**, falls $(\nexists b \in S)[b \neq a \wedge b \preceq a]$.
- Ein Element $a \in S$ heißt **maximal**, falls $(\nexists b \in S)[b \neq a \wedge a \preceq b]$.
- Eine partielle Ordnung heißt **linear** oder **vollständig**, falls sie keine unvergleichbaren Elemente enthält (z. B. (\mathbb{N}_0, \leq)).

4.5 Boolesche Ausdrücke und Funktionen, Logiken

Oft ordnen wir Aussagen über irgendwelche Gegebenheiten die Werte *true* oder *false* zu. Daneben verwenden wir auch Verknüpfungen solcher Aussagen mittels Operatoren wie z.B. „und“, „oder“, oder der Negation.

Der [Boolesche Aussagenkalkül](#) stellt für dieses Vorgehen einen formalen Rahmen dar.



George Boole

lived from 1815 to 1864

Boole approached logic in a new way reducing it to a simple algebra, incorporating logic into mathematics. He also worked on differential equations, the calculus of finite differences and general methods in probability.

[more on George Boole](#)

Logik

- Logik ist die Wissenschaft des (begrifflichen) Schließens.
Sie untersucht, welche Inferenzen korrekt sind.
- Unter Inferenz verstehen wir (informell) eine Aussage der Form:
wenn A gilt/wahr ist, dann auch B.
- Alternative Sprechweisen:
 - „Wenn A, dann B“
 - „Aus A folgt B“, „B ist eine Folge von A“
 - „A impliziert B“, „ $A \Rightarrow B$ “
 - „Wenn B nicht gilt, dann kann auch A nicht gelten“
 - „A nur wenn B“
- Dabei heißt A jeweils die Annahme (Prämisse, Antezedens, Hypothese) und B die Konklusion (Folgerung, Conclusio, Konsequenz).

Bemerkung:

- Unter einer **Implikation** versteht man gewöhnlich einen Ausdruck/eine Behauptung der Form

aus A folgt B bzw. $A \Rightarrow B$.

- Unter einer **Inferenz** versteht man den Vorgang, (im Rahmen einer Logik) für A und B (wie oben) von der Aussage/Behauptung A zu der Aussage/Behauptung B zu kommen.

Achtung!

Wenn (irgendwie) eine Implikation

aus A folgt B

gilt/wahr ist, so heißt das von sich aus noch **nicht**, dass

- A gilt/wahr ist, oder
- B gilt/wahr ist.

Es sagt nur, dass, **wenn** A gilt, **dann** auch B .

Aussagenlogik (Propositional Logic)

- Aussagen werden aus einer vorgegebenen Menge von **atomaren** Aussagen (Platzhaltern für Aussagen) mit Hilfe der **Operatoren** (**Konnektoren**, **Junktoren**) „und“, „oder“, „nicht“ und „wenn, . . . dann“ (**u.a.**) gebildet.
- Atomare (aussagenlogische) Aussagen sind **entweder wahr oder falsch**.
- Die Grundlagen der Aussagenlogik wurden von George Boole („The Laws of Thought“, 1854) entwickelt (s.o.). Man spricht deshalb auch von der **Booleschen Logik**.