Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Susanne Albers
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Übungsblatt 10
23. Juni 2014

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 2. Juli 2014, 10 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sei X eine Zufallsvariable mit unbekanntem Erwartungswert μ und einer Standardabweichung $\sigma_X = 2$. Wir verwenden $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ als Schätzvariable für μ, wobei die X_i unabhängige Wiederholungen von X seien. Wir setzen voraus, dass $\bar{X}$ für $n \geq 1500$ normalverteilt ist.

1. Leiten Sie eine möglichst kleine untere Schranke n_0 für n her, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt
$$\Pr[|\bar{X} - \mu| < 0{,}1] \geq 0{,}9\,.$$
Für das 0,95-Quantil der Standardnormalverteilung ist dabei $z_{0,95} \approx 1{,}65$ zu verwenden.

2. Nun sei $n = 2500$. Geben Sie ein Konfidenzintervall für μ zum Konfidenzniveau 0,9 an!

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie:

1. Wenn zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y normalverteilt sind, dann ist auch ihre Differenz $X - Y$ normalverteilt.

2. Jede erwartungstreue Schätzvariable für einen Parameter δ schätzt den Erwartungswert von δ.

3. Die Anwendung des Maximum-Likelihood-Prinzips setzt die Verfügbarkeit einer Stichprobe voraus.

4. Bei echten Alternativtests ist die Summe der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art und der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art stets gleich 1.

5. Wir betrachten eine erwartungstreue, diskrete Schätzvariable X für einen Parameter α. Für die Verteilungsdichte f_X gelte $f_X(i) = \frac{3^i e^{-3}}{i!}$ für $i \in \mathbb{N}_0$. Dann ist 3 der durch X für α geschätzte Wert.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Seien $\lambda > 0$ und $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte kontinuierliche Zufallsvariable jeweils mit der gleichen Dichte

$$f(t) := \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda^3 t^2 e^{-\lambda t} & : t \geq 0\,, \\ 0 & : \text{sonst}\,. \end{cases}$$

1. Sei $\vec{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ ein Stichprobenvektor. Stellen Sie die Likelihood-Funktion $L(\vec{k}; \gamma)$ für den Parameter $\gamma = \frac{1}{\lambda}$ auf.

2. Bestimmen Sie den ML-Schätzer für γ durch Maximieren von $L(\vec{k}; \gamma)$.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Stichproben einer Zufallsvariablen X und sei $\bar{X}$ das arithmetische Mittel der X_i. Wir verwenden die Zufallsvariable

$$V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

als Schätzer für die Varianz von X.

Berechnen Sie den Bias von V! Welche Aussage gilt für $n \to \infty$?

Zusatzaufgabe 4 (Wird nicht korrigiert)

Seien Φ bzw. Θ unabhängige ZV mit Φ gleichverteilt auf $[-\pi, \pi)$ bzw. $[0, 1]$. Dann ist durch

$$G(\Phi, \Theta) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x\cos\Phi + y\sin\Phi = \Theta\}$$

eine zufällige Gerade im $\mathbb{R}^2$ beschrieben, wobei Θ den Abstand der Geraden vom Ursprung angibt.

1. Für ein festes $r \in [0, \infty)$ sei $K_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, \sqrt{x^2 + y^2} = r\}$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit
$$\Pr[G(\Phi, \Theta) \cap K_r \neq \emptyset]\,.$$

2. Für ein festes $\rho \in [0, \pi]$ sei $L_\rho = \{(\cos\alpha, \sin\alpha) \in \mathbb{R}^2\,;\, \alpha \in [-\rho/2, \rho/2)\}$. Bestimmen Sie wiederum die Wahrscheinlichkeit
$$\Pr[G(\Phi, \Theta) \cap L_\rho \neq \emptyset]\,.$$

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

Auf zwei unabhängigen Servern stehe ein Web-Dienst zur Verfügung. Es soll festgestellt werden, welcher Server schnellere Antwortzeiten liefert. Dazu werden $n = 1000$ Anfragen an die Server geschickt und es wird festgestellt, von welchem Server die Antwort zuerst eintrifft. Dabei gehen wir davon aus, dass Pakete nicht gleichzeitig empfangen werden können. In 540 Fällen antwortet Server A vor Server B.

Wir wählen als Nullhypothese H_0 die Aussage, dass Server B im Mittel schneller ist als Server A.

Kann man für einen entsprechenden statistischen Test auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,04$ die Nullhypothese annehmen?
Formulieren Sie hierzu den Test und weisen Sie Ihre Behauptung nach.

Vorbereitung 2

An der dänischen Grenze werden Grenzkontrollen durchgeführt. Im Schnitt treffen alle 30 Sekunden an der Grenzstation Personen ein, die zu kontrollieren sind. Die Zeit zwischen zwei Kontrollen sei exponentialverteilt mit Parameter $\frac{1}{30}$. Wenn 2 Minuten lang kein Kontrollfall eingetroffen ist, dann machen die Grenzbeamten Ruhepause.

Seien $T_1, T_2, \ldots$ die Zeitspannen zwischen dem Eintreffen von zu kontrollierenden Personen und W die Wartezeit bis zur nächsten Ruhepause.

1. Berechnen Sie $\mathbb{E}[T_1 \mid T_1 \geq 120]$.
2. Berechnen Sie $\mathbb{E}[W]$.

Vorbereitung 3

Seien $T_1, T_2, \ldots$ unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit gleichem Parameter λ. Seien $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ für die Verteilungsfunktion von S_n, dass für alle $t \geq 0$ gilt:

$$F_{S_{n+1}}(t) = -\frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t} + F_{S_n}(t)\,.$$

Tutoraufgabe 1

Sei $T = X_1 + X_2 + X_3$ eine Zufallsvariable, wobei X_1, X_2 und X_3 unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit p seien. Wir betrachten T als Stichprobenvariable zum Test der Hypothese $H_0 : p \geq \frac{1}{3}$ mit Ablehnungsbereich $\tilde{K} = \{0, 1, 2\}$.

1. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_T von T!
2. Berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art!
3. Berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art unter der Annahme, dass $H_1 : p \leq \frac{1}{4}$ eine echte Alternative zu H_0 sei!

Tutoraufgabe 2

Ein Hersteller von Nahrungsmittelkonserven gibt die Haltbarkeit eines bestimmtes Produkts mit mindestens 50 Monaten an. Sie kaufen 20 derartige Konserven und messen ihre Haltbarkeit. Die Konserven haben im Schnitt 40 Monate gehalten mit einer Stichprobenstandardabweichung von $S = 30$ Monaten.

1. Zeigen Sie, dass die Angabe des Herstellers nicht abgelehnt werden kann (Signifikanzniveau 0.05).
2. Wie viele Konserven hätten Sie mindestens kaufen müssen, um die Angabe des Herstellers ablehnen zu können?

Tutoraufgabe 3

Seien $T_1, T_2, \ldots$ unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit gleichem Parameter λ. Beispiel: Grenzkontrollen in VA 2 mit $\lambda = \frac{1}{30}$.

Seien $S_n = \sum_{i=0}^{n} T_i$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir betrachten den Stochastischen Prozess $(X(t))_{t>0}$, der gegeben ist durch

$$X(t) := \max\{n \in \mathbb{N}_0\,;\, S_n \leq t\}\,.$$

1. Zeigen Sie, dass für alle $t > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ die folgende Gleichung gilt:
$$f_{X(t)}(n) = \Pr[S_n \leq t < S_{n+1}]\,.$$
2. Für alle $t > 0$ sind die Variablen $X(t)$ Poisson-verteilt. Geben Sie eine explizite Darstellung der Dichtefunktion $f_{X(t)}$ an.
3. Beweisen Sie die vorgenannte explizite Darstellung der Dichtefunktion $f_{X(t)}$ durch direkte Berechnung und ohne Benutzung der Kenntnis, dass $X(t)$ Poisson-verteilt ist.