SS 2015

Zentralübung zur Vorlesung Theoretische Informatik

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2015SS/theo/uebung/

21. Mai 2015

ZÜ V

Übersicht:

1. Übungsbetrieb Fragen, Probleme?
2. Thema Strukturelle Induktion

   Beispiele
   Sätze
3. Vorbereitung TA Blatt 6

1. Fragen, Anregungen?

Aktuelle Fragen?

Termine

In der nächsten Woche am Montag, Dienstag und Mittwoch sind keine Übungen.

Am Donnerstag und Freitag finden die Übungen statt.

2. Thema: Strukturelle Induktion

Erinnerung ZÜ I:

Berechenbarkeitsbegriffe beruhen auf endlichen Regelsystemen, deren Regeln einzeln effektiv angewendet werden können, um Elemente zu erzeugen bzw. zu benennen.

Insgesamt werden dadurch induktiv Mengen dargestellt bzw. erzeugt.

Formal werden die erzeugten Mengen
als Durchschnitt aller Mengen dargestellt,
die in gewissem Sinne abgeschlossen sind gegenüber der Erzeugung von Elementen.

2.1 Beispiele

Grundlegendes Beispiel ist die Erzeugung von Darstellungen von natürlichen Zahlen, bei der es eine Regel gibt, die es erlaubt, an eine schon erzeugte Zahldarstellung durch Anfügen eines Striches die nachfolgende Zahl darzustellen.

Als Startregel kann man das Hinschreiben eines einzelnen Striches zur Darstellung der Zahl 1 betrachten.

Die Menge der natürlichen Zahlen wird dann als kleinste, gegenüber der Regelanwendung abgeschlossenen Menge dargestellt.

Beispiel 1

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein Tupel von Mengen $X_1, X_2 \subseteq \Sigma^*$ mit $\Sigma = \{a, b\}$.
Wir betrachten das folgende Regelsystem H mit drei Implikationen.

$$H : \quad \begin{array}{lrcl} (1) & & \Longrightarrow & aa \in X_1\,, \\ (2) & x \in X_2 & \Longrightarrow & xa \in X_1\,, \\ (3) & x \in X_1 & \Longrightarrow & ax \in X_2\,. \end{array}$$

Induktive Beweise hängen eng mit dieser Betrachtungseise zusammen. Sie kann insbesondere bei kontextfreien Sprachen demonstriert werden, wie folgt.

Das Tupel $X = (X_1, X_2)$ heißt H-abgeschlossen, falls die Implikationen (1), (2) und (3) gelten.

1. Seien I eine nicht leere Indexmenge und $Y = (Y_i)_{i \in I}$ eine Familie von H-abgeschlossenen Mengentupeln $Y_i = (Y_{i,1}, Y_{i,2})$.

   Zeigen Sie, dass der Durchschnitt

   $$\bigcap Y = \left(\bigcap_{i \in I} Y_{i,1}, \bigcap_{i \in I} Y_{i,2} \right) .$$

   ebenfalls H-abgeschlossen ist.

Lösung

Die Beweise sind für alle Implikationen gleichartig. Wir betrachten nur die Implikation (2).

Sei $X = (X_1, X_2) = \left(\bigcap_{i \in I} Y_{i,1}, \bigcap_{i \in I} Y_{i,2} \right)$.

Zu zeigen: $x \in X_2 \implies xa \in X_1$.

Sei $x \in X_2$.
Dann gilt $x \in Y_{i,2}$ für alle $i \in I$ (Durchschnittseigenschaft).
Da alle Y_i H-abgeschlossen sind, folgt $xa \in Y_{i,1}$ für alle $i \in I$.

Damit folgt $xa \in X_1$ (Durchschnittseigenschaft),
mithin gilt Implikation (2).

2. Zeigen Sie, dass es zu jedem Tupel $A = (A_1, A_2)$ ein kleinstes H-abgeschlossenes Tupel A^H gibt, so dass $A \subseteq A^H$.

   Dabei sei die Mengeninklusion komponentenweise auf 2-Tupel erweitert.

   A^H heißt dann die H-abgeschlossene Hülle von A oder das von A erzeugte H-abgeschlossene Mengentupel.

Lösung

Zunächst ist (Σ^*, Σ^*) offenbar ein H-abgeschlossenes Tupel.

Außerdem gilt $A_1 \subseteq \Sigma*$ und $A_2 \subseteq \Sigma*$, d.h. $A \subseteq (\Sigma^*, \Sigma^*)$.

Damit ist die Familie Y aller H-abgeschlossenen Y_i mit $A \subseteq Y_i$ nicht leer.

Damit ist der Durchschnitt $\bigcap Y$ das gesuchte A^H, d.h.

$$A^H = \bigcap (Y_i \,;\, A \subseteq Y_i \text{ und } Y_i \text{ ist } H\text{-abgeschlossen}) \,.$$

3. Seien $(L_1, L_2) = (\emptyset, \emptyset)^H$.

   Beweisen Sie induktiv mit Hilfe der H-Abgeschlossenheit, dass alle Wörter in L_1 aus einer geraden Anzahl von Buchstaben a bestehen.

Lösung

Seien $P \subseteq \Sigma^*$ die Menge aller Wörter geradzahliger Länge,
und $Q \subseteq \Sigma^*$ die Menge aller Wörter ungeradzahliger Länge.

Dann ist (P, Q) offenbar H-abgeschlossen, denn

Regel (1): $aa \in P$,
Regel (2): aus $x \in Q$ folgt $xa \in P$, und
Regel (3): aus $x \in P$ folgt $ax \in Q$.

Es folgt

$$(L_1, L_2) = (\emptyset, \emptyset)^H = (\emptyset, \emptyset)^H \cap (P, Q) \subseteq (P, Q),$$

d.h. $L_1 \subseteq P$, mithin sind alle Wörter aus L_1 geradzahlig.

4. Eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ sei durch folgende Produktionen gegeben.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aa \mid Ba\,, \\ B &\rightarrow aS\,. \end{aligned}$$

Sei $(L_1, L_2) = (\emptyset, \emptyset)^H$.

Zeigen Sie $L_G = L_1$.

Bemerkung:
Das Regelsystem H und die Grammatik G entsprechen sich in kanonischer Weise.

Die kanonische Umsetzung geschieht wie folgt:

Sei $V = \{S, B\}$.
Jeder Variablen $X \in V$ wird die Sprache

$$L(X) := \{w \in \Sigma^* \,;\, X \underset{G}{\rightarrow}^* w\}$$

zugeordnet.

Damit erhält man ein System $(L(S), L(B)) \subseteq (\Sigma^*, \Sigma^*)$.

Wir ordnen jeder Produktionsregel der Grammatik eine Implikation zu wie folgt:

$P:$	$\gg$	$H:$			
$S \to aa$	$\gg$	(H_1)		$\Longrightarrow$	$aa \in X_1\,,$
$S \to Ba$	$\gg$	(H_2)	$x \in X_2$	$\Longrightarrow$	$xa \in X_1\,,$
$B \to aS$	$\gg$	(H_3)	$x \in X_1$	$\Longrightarrow$	$ax \in X_2\,.$

Sei (L_1, L_2) die H-abgeschlossene Hülle des Tupels der leeren Mengen $(\emptyset, \emptyset)$.

Dann gilt

$$(L(S), L(B)) = (L_1, L_2)\,.$$

Beweis

Nach Definition gilt $L_S = \{w\,;\, S \xrightarrow[G]{}^* w\}$ und $L_B = \{w\,;\, B \xrightarrow[G]{}^* w\}$.

(L_S, L_B) ist offenbar H-abgeschlossen,
und natürlich gilt $(\emptyset, \emptyset) \subseteq (L_S, L_B)$.

Daraus folgt $(L_1, L_2) \subseteq (L_S, L_B)$.

Die Umkehrung $(L_S, L_B) \subseteq (L_1, L_2)$
zeigt man induktiv über die Länge $n \in \mathbb{N}$ der Ableitungen

$X \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \;\ldots\; \rightarrow \alpha_n = w \in \Sigma^*$
oder kurz $X \xrightarrow[n]{} w$

für $X \in V$ wie folgt.

Sei $X \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \ \ldots \ \rightarrow \alpha_n = w \in \Sigma^*$
oder kurz $X \underset{n}{\rightarrow} w$ für $X \in V$.

<u>$n = 1$:</u>
Dann gilt $S \rightarrow \alpha_1 = w = aa$. Mit Regel H_1 folgt $aa \in L_1$.

<u>$n \rightarrow n + 1$ und $n \geq 1$:</u>
<u>$X = S$:</u>
Es gilt $S \rightarrow Ba \underset{n}{\rightarrow} w = xa$ mit $B \underset{n}{\rightarrow} x$ (Zerlegungssatz BI.4, VA3.1).
Nach Induktionsvoraussetzung gilt $x \in L_2$.
Nach Regel H_2 folgt $xa \in L_1$.
<u>$X = B$:</u>
Es gilt $B \rightarrow aS \underset{n}{\rightarrow} w = ax$ mit $S \underset{n}{\rightarrow} x$ (Zerlegungssatz BI.4, VA3.1).
Nach Induktionsvoraussetzung gilt $x \in L_1$.
Nach Regel H_3 folgt $ax \in L_2$.

2.2 Sätze

Satz 1

Kontextfreie Sprachen mit nullierbar kontextfreier Grammatik
$G = (V, \Sigma, P, S)$, $V = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ (s. Bl 4)
und Produktionen der Form

$$A_i \to w_0 A_{i_1} w_1 \ldots w_{n-1} A_{i_n} w_n$$

können äquivalent durch ein korrespondierendes Regelsystem H für Mengensysteme definiert werden mit Regeln den folgenden Form:

$$u_1 \in L_G(A_{i_1}) \wedge \ldots \wedge u_n \in L_G(A_{i_n}) \\ \Longrightarrow \quad w_0 u_1 w_1 \ldots w_{n-1} u_n w_n \in L_G(A_i)\,.$$

Hinweis: Umsetzung analog Beispiel 1.

Satz 2

Aussagen der Form

$$\forall u_1 \in L_G(A_1), \ldots, u_n \in L_G(A_k) : \quad P_1(u_1) \wedge \ldots \wedge P_k(u_k)$$

werden bewiesen,
indem man für jede Produktion j
der Form $A_i \to w_0 A_{i_1} w_1 \ldots w_{n-1} A_{i_n} w_n$
Folgendes zeigt:

$$P_{i_1}(u_1) \wedge \ldots \wedge P_{i_n}(u_n) \implies P_i(w_0 u_1 w_1 \ldots w_{n-1} u_n w_n)\,.$$

Anwendung: Beispiel 1.

3. Vorbereitung TA Blatt 6

VA 1 wurde im Thema bearbeitet.

3.1 VA 2

Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S, T\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Produktionen

$$S \to aSb \mid SS \mid \epsilon\,, \qquad T \to TaTb \mid \epsilon\,.$$

Wir definieren $L(X) := \{w \in \Sigma^*\,;\, X \xrightarrow[G]{}^* w\}$ für $X \in V$. Zeigen Sie jeweils per Induktion:

1. $L(T) \subseteq L(S)$.
2. Wenn $w \in L(T)$, dann ist auch $awb \in L(T)$.
3. Wenn $v \in L(T)$ und $w \in L(T)$, dann ist auch $vw \in L(T)$.
4. $L(S) \subseteq L(T)$.

Letztendlich besagen 1. zusammen mit 4. die Gleichheit der Sprachen $L(S)$ und $L(T)$, d.h., $L_G(S) = L(S) = L(T) = L_G(T)$.

Offenbar gilt $L(S) = L_{G_S}$
mit der Grammatik $G_S = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ und den Produktionen $S \to aSb \mid SS \mid \epsilon$,

während $L(T) = L_{G_T}$ gilt
mit Grammatik $G_T = (\{T\}, \{a, b\}, P, T)$ und den Produktionen $T \to TaTb \mid \epsilon$.

G ist in gewisser Weise die disjunkte Vereinigung von Grammatiken G_S und G_T, wenn man von den Axiomen absieht.

Eine Grammatik definiert für jede enthaltene Variable eine zugeordnete Sprache. Das Axiom zeichnet eine Variable aus bezeichnungstechnischen Gründen aus.

1. $L(T) \subseteq L(S)$.

Beweis

Es gibt S-Regeln und T-Regeln für das Mengensystem (X_S, X_T). Aus den T-Produktionen erhalten wir das folgende Regelsystem T mit zwei Implikationen für die Menge X_T.

Die Regeln sind unabhängig von X_S, d.h. X_S kommt in den Prämissen der Regeln nicht vor:

$$T: \quad \begin{array}{lll} (1) & & \Longrightarrow \ \epsilon \in X_T\,, \\ (2) & x, y \in X_T & \Longrightarrow \ xayb \in X_T\,. \end{array}$$

Dann ist zu zeigen, dass $L(S)$ abgeschlossen ist gegenüber der Anwendung von T-Regeln, d.h.,

$$T: \quad \begin{array}{lll} (1) & & \Longrightarrow \ \epsilon \in L(S)\,, \\ (2) & x, y \in L(S) & \Longrightarrow \ xayb \in L(S)\,. \end{array}$$

(1): Es gilt $\epsilon \in L(S)$.
(2): Seien $x, y \in L(S)$.
Dann gibt es die Ableitung $S \underset{P}{\rightarrow} SS \underset{G}{\rightarrow} SaSb \underset{G}{\rightarrow}^{*} xaSb \underset{G}{\rightarrow}^{*} xayb$,
d.h., $xayb \in L(S)$.
Es folgt die T-Abgeschlossenheit für $L(S)$.
Da $L(T)$ die T-abgeschlossene Hülle von $\emptyset$ ist, folgt $L(T) \subseteq L(S)$.

2. Wenn $w \in L(T)$, dann ist auch $awb \in L(T)$.
3. Wenn $v \in L(T)$ und $w \in L(T)$, dann ist auch $vw \in L(T)$.
4. $L(S) \subseteq L(T)$.

Beweis

2 und 3 ergeben sich aus dem Beweis von 4.

4. $L(S) \subseteq L(T)$.

Beweis

Aus den S-Produktionen erhalten wir das folgende Regelsystem S mit drei Implikationen für eine Menge X_S:

$$S: \quad \begin{array}{lll} (1) & & \Longrightarrow \ \epsilon \in X_S\,, \\ (2) & x \in X_S & \Longrightarrow \ axb \in X_S\,, \\ (3) & x, y \in X_S & \Longrightarrow \ xy \in X_S\,. \end{array}$$

Dann ist zu zeigen, dass $L(T)$ abgeschlossen ist gegenüber der Anwendung von S-Regeln, d.h.,

$$S: \quad \begin{array}{lll} (1) & & \Longrightarrow \ \epsilon \in L(T)\,, \\ (2) & w \in L(T) & \Longrightarrow \ awb \in L(T)\,, \quad \text{(Teilaufg. 2)} \\ (3) & v, w \in L(T) & \Longrightarrow \ vw \in L(T)\,. \quad \text{(Teilaufg. 3)} \end{array}$$

(1): Es gilt $\epsilon \in L(T)$.

(2): Sei $w \in L(T)$.

Dann gibt es die Ableitung $T \underset{P}{\rightarrow} TaTb \underset{G}{\rightarrow} aTb \underset{G}{\rightarrow}^{*} awb$, d.h., $awb \in L(T)$.

(3): Seien $v, w \in L(T)$.

Dann gibt es eine Ableitung $T \underset{G}{\rightarrow}^* Tw \underset{G}{\rightarrow} w$, da die Reihenfolge der terminalen ϵ-Produktionen beliebig wählbar ist und stets eine Variable T am Wortanfang steht, falls keine ϵ-Produktion angewandt wurde.

Es folgt $T \underset{G}{\rightarrow}^* Tw \underset{G}{\rightarrow}^* vw$, d.h. $vw \in L(T)$.
Damit gilt die S-Abgeschlossenheit für $L(T)$.

Da $L(S)$ die S-abgeschlossene Hülle von $\emptyset$ ist, folgt $L(S) \subseteq L(T)$.

3.2 VA 3

Gegeben sei der Kellerautomat $K = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta)$ mit $\Sigma = \{a, b, \#\}$, $\Gamma = \{Z_0, X, Y, Z\}$ und der Übergangsfunktion

$$\begin{array}{rclcrcl} \delta(q, \epsilon, Z_0) & = & \{(q, XZ)\}, & \quad & \delta(q, a, X) & = & \{(q, XY)\}, \\ \delta(q, \#, X) & = & \{(q, \epsilon)\}, & & \delta(q, b, Y) & = & \{(q, \epsilon)\}, \\ \delta(q, a, Z) & = & \{(q, \epsilon)\}. & & & & \end{array}$$

1. Geben Sie eine Berechnung als Konfigurationsfolge an, die zeigt, dass K das Wort $a\#ba$ mit leerem Keller akzeptiert, d. h., dass $a\#ba \in L_\epsilon(K)$ gilt.
2. Modifizieren Sie die Übergangsfunktion δ so zu einer Funktion δ', dass für den Kellerautomaten $K' = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta')$ gilt: $L_\epsilon(K') = (L_\epsilon(K))^*$.

$$\begin{array}{lcl} \delta(q,\epsilon,Z_0) &=& \{(q,XZ)\}\,, \\ \delta(q,\#,X) &=& \{(q,\epsilon)\}\,, \\ \delta(q,a,Z) &=& \{(q,\epsilon)\}\,. \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \delta(q,a,X) &=& \{(q,XY)\}\,, \\ \delta(q,b,Y) &=& \{(q,\epsilon)\}\,, \end{array}$$

Lösung

1. $$\begin{aligned} (q, a\#ba, Z_0) &\to_K (q, a\#ba, XZ) \\ &\to_K (q, \#ba, XYZ) \\ &\to_K (q, ba, YZ) \to_K (q, a, Z) \to_K (q, \epsilon, \epsilon) \end{aligned}$$
2. Wenn man δ als Übergangsrelation auffasst, dann ist

$$\delta' = \delta \cup \{(q,a,Z) \to (q,Z_0),\ (q,\boldsymbol{\epsilon},Z_0) \to (q,\epsilon)\}\ .$$

Der erste neue Übergang erlaubt den Rücksprung zum Anfang. Der zweite neue Übergang stellt sicher, dass auch das leere Wort akzeptiert wird.