Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2015
Übungsblatt 11
29. Juni 2015

Theoretische Informatik

Abgabetermin: 6. Juli 2015, 13 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Geben Sie für die Sprache

$$L = \{ww\,;\, w \in \{0,1\}^*\}$$

einen linear beschränkten Automaten (LBA) M an, der L akzeptiert.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $P(k,\overline{x})$ ein primitiv-rekursives $(n+1)$-stelliges Prädikat, wobei $\overline{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ eine Abkürzung sei für die letzten n Stellen und $n=0$ den einstelligen Fall $P(k)$ bedeute. In den Beweisen dürfen erweiterte Komposition und erweiterte Schemata benützt werden.

1. Sei $\max\emptyset = 0$. Zeigen Sie, dass die folgende Funktion $q(m,\overline{x})$ primitiv-rekursiv ist.

$$q(m,\overline{x}) = \max\{k\,;\, k\le m \,\wedge\, P(k,\overline{x})\}\,.$$

   Die entsprechende Aussage aus der Vorlesung ist zum Beweis nicht verwendbar. Begründen Sie diesen Sachverhalt!

2. Zeigen Sie, dass der folgende beschränkte Existenzquantor primitiv-rekursiv ist.

$$Q(m,\overline{x}) := \exists k\le m :\; P(k,\overline{x})\,.$$

   Hinweis: Es ist von Vorteil, zunächst im Fall $\hat{P}(0,\overline{x}) = 0$ für alle $m \ge 0$ die folgende Gleichung zu beweisen:

$$\hat{Q}(m,\overline{x}) = 1 \dot{-} (1 \dot{-} q(m,\overline{x}))\,.$$

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Ganzzahlige Division $Div(m,n)$ von natürlichen Zahlen m und n ist definiert durch

$$Div(m,0) = 0 \quad \text{und} \quad Div(m,n) = \max\{k\,;\, k\cdot n \le m\} \quad \text{für} \quad n \ne 0\,.$$

Zeigen Sie, dass $Div(m,n)$ primitiv-rekursiv ist.

Hinweis: Verwerten Sie die Erkenntnisse aus Hausaufgabe 2 und definieren Sie ein Prädikat $P(k,m,n) := (k\cdot n \le m) \wedge (n \ne 0)$. Beweisen Sie zunächst, dass $P(k,m,n)$ primitiv rekursiv ist.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, die für alle $n \geq 3$ der linearen Rekursion $f(n) = f(n-1) + f(n-3)$ genügt. Außerdem gelte $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 3$.

1. Zeigen Sie, dass f primitiv-rekursiv ist.
2. Sei W_f der Wertebereich von f, d. h. $W_f = \{f(n)\,;\, n \in \mathbb{N}_0\}$. Zeigen Sie, dass W_f entscheidbar ist.
3. Sei $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ die Umkehrfunktion von f auf dem Wertebereich W_f von f, d. h., dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $n = g(f(n))$ und für $y \notin W_f$ gilt, dass $g(y)$ nicht definiert ist. Zeigen Sie, dass g WHILE-berechenbar ist.

Zusatzaufgabe 9 (wird nicht korrigiert)

Ein 2-Kellerautomat $K = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, Z_0', F)$ ist ein Kellerautomat, der über einen zweiten Keller verfügt. Der zweite Keller wird mit Z_0' initialisiert. Die Übergangsfunktion $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \times \Gamma \to \mathcal{P}_e(Q \times \Gamma^* \times \Gamma^*)$ beschreibt die Vorgehensweise des 2-KA wie folgt ($\mathcal{P}_e$ bezeichnet die Menge aller endlichen Teilmengen): Liest der 2-KA im Zustand q die Eingabe b (auch $b = \epsilon$ ist möglich), sind Z_1, Z_2 die obersten Zeichen der beiden Keller und gilt $(q', \alpha_1, \alpha_2) \in \delta(q, b, Z_1, Z_2)$, dann kann der 2-KA in den Zustand q' übergehen und hierbei Z_1 durch α_1 und Z_2 durch α_2 ersetzen.

Zeigen Sie: Jede (deterministische) Turingmaschine $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ kann durch einen 2-Kellerautomaten $K = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', Z_0, Z_0', F')$ simuliert werden.
Hinweis: Bei einer Simulation müssen die Berechnungen bzw. Konfigurationsänderungen zweier Machinen einander zugeordnet werden können und die akzeptierten Sprachen müssen gleich sein.

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

1. Im Folgenden bezeichne $a(n, m)$ die Ackermann-Funktion.

   Berechnen Sie $a(1, 6)$ und $a(2, 1)$!

2. Sei a die Ackermann-Funktion. Zeigen Sie, dass die folgenden Wertemengen entscheidbar sind.

   (i) $W_a = \{a(n, m)\,;\, n, m \in \mathbb{N}_0\}$. (ii) $W'_a = \{a(n, n)\,;\, n \in \mathbb{N}_0\}$.

Vorbereitung 2

Sei $a : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ die Ackermann-Funktion.

1. Zeigen Sie, dass $f(m, n) := (a(m, n))^2$ nicht primitiv-rekursiv ist.

2. Die Funktion $a' : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ sei gegeben durch $a'(n) = a(n, n)$.
   Sei $W_{a'} = \{a'(n)\,;\, n \in \mathbb{N}_0\}$.

   Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion $b' : W_{a'} \to \mathbb{N}_0$ von a' μ-rekursiv ist.

Vorbereitung 3

Wir betrachten die in der Vorlesung beschriebene Kodierung von Turingmaschinen durch Wörter über $\Sigma^* = \{0, 1\}^*$. Für ein $w \in \Sigma^*$ beschreibt $\varphi_w : \Sigma^* \to \Sigma^*$ dann die Funktion, die durch die Turingmaschine M_w berechnet wird. Finden Sie informelle Beschreibungen für die folgenden Mengen:

1. $A = \{w \in \Sigma^*\,;\, \varphi_w = \Omega\}$.

2. $B = \{w \in \Sigma^*\,;\, \varphi_w(101) \neq \perp\}$.

Bemerkung: Die Standard-Turingmaschine, die für ein ungeeignetes Kodewort w gewählt wird, terminiert nie und berechnet deshalb die nirgends definierte Funktion Ω.

Vorbereitung 4

Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit der folgenden Mengen und wenden Sie zum Beweis Techniken der Reduzierbarkeit eines Problems A auf ein Problem B an.

1. $H_{\Sigma^*} = \{w\,;\, M_w \text{ hält für mindestens eine Eingabe}\}$.

2. $C = \{w\,;\, M_w \text{ berechnet die Funktion } g \text{ mit } g(n) = 0 \text{ für alle n}\}$.

Tutoraufgabe 1

1. Falls A auf B mit Funktion f reduzierbar ist, dann gilt $f^{-1}(B) = A$, aber nicht notwendigerweise $f(A) = B$. Beweis!

2. Falls A reduzierbar auf B und B semi-entscheidbar ist, dann ist auch A semi-entscheidbar. Beweis!

3. Sei $B \subseteq \Sigma^*$ mit $B \neq \Sigma^*$ und $B \neq \emptyset$ entscheidbar.
   Zeigen Sie: B ist reduzierbar auf $\Sigma^* \setminus B$.

Tutoraufgabe 2

1. Seien L_1 und L_2 rekursiv auflistbare Mengen. Sind die folgenden Mengen L_a und L_b rekursiv auflistbar? Beweisen Sie Ihre Antwort!

   (i) $L_a = L_1 \cup L_2$ (i) $L_b = \{x\,;\, x \in L_1 \Leftrightarrow x \in L_2\}$

2. Seien $L_n \subseteq A$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ rekursiv auflistbar. Zeigen Sie, dass dann

   $$L = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$$

   abzählbar, aber nicht notwendigerweise rekursiv auflistbar ist.

Tutoraufgabe 3

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Rice:

1. $L_1 = \{w \in \Sigma^*\,;\, L(M_w) \text{ ist kontextfrei}\}$ ist unentscheidbar.

2. $L_2 = \{w \in \Sigma^*\,;\, \forall n \in \mathbb{N}_0.\, \varphi_w(n) = 3n + 5\}$ ist unentscheidbar.

Tutoraufgabe 4

1. Sei $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ total und μ-rekursiv, und sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definiert durch die Startwerte $f(0) = 1$ und $f(1) = 2$ zusammen mit der Rekursion

   $$f(n) = g(n) + f(n-1) \cdot f(n-2) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\,.$$

   Zeigen Sie die μ-Rekursivität der Funktion f, indem Sie die Erzeugungsregeln für μ-rekursive Funktionen zusammen mit einer Paarfunktion $p : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ und deren Umkehrfunktionen c_1 und c_2 anwenden.

   Hinweis: Sie dürfen zusätzlich zu den Basisfunktionen der primitiven Rekursion die folgenden Funktionen als primitiv-rekursiv annehmen: $plus(m, n)$ $(+)$, $times(m, n)$ $(\cdot)$, $pred(n)$, $p(m, n)$, $c_1(n)$, $c_2(n)$ und die konstante k-stellige Funktion c_n^k. Sie dürfen die erweiterte Komposition und das erweiterte rekursive Definitionsschema benützen. LOOP- und WHILE-Programme sind nicht erlaubt.

2. Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definiert durch die Startwerte $f(0) = 1$ und $f(1) = 2$ zusammen mit der Rekursion

   $$f(n) = 1 + f(n-1) \cdot f(n-2) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\,.$$

   Zeigen Sie, dass f primitiv-rekursiv ist, indem Sie f durch ein LOOP-Programm darstellen. *IF THEN ELSE* Konstrukte sowie arithmetische Operationen dürfen verwendet werden.