Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2015
Übungsblatt 12
6. Juli 2015

Theoretische Informatik

Abgabetermin: 13. Juli 2015, 13 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Der Binomialkoeffizient $binom(n, m) = \binom{n}{m}$ ist eine Funktion von $\mathbb{N}_0^2$ in $\mathbb{N}_0$ mit den Eigenschaften $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{0}{m} = 0$ für $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $m > 0$. Der Binomialkoeffizient erfüllt für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ die Rekursionsgleichung

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m+1} + \binom{n}{m}.$$

Für jede natürliche Zahl m_0 betrachten wir die Funktion $b_{m_0} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $b_{m_0}(n) = binom(n, m_0)$. Zeigen Sie durch Induktion über m_0, dass alle Funktionen $b_{m_0}(n)$ mit $m_0 \in \mathbb{N}_0$ primitiv-rekursiv (als Funktion in n) sind.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. $M_w[x] \downarrow$ bedeutet, dass die durch $w \in \{0, 1\}^*$ kodierte Turingmaschine M_w bei Eingabe x hält, d.h. terminiert.

1. Wir betrachten das spezielle Halteproblem $K = \{w \in \Sigma^* ; M_w[w]\downarrow\}$ und das Halteproblem auf leerem Band $H_0 = \{w \in \Sigma^* ; M_w[\epsilon]\downarrow\}$.

   Zeigen Sie durch hinreichend genaue Spezifikation und Begründung einer Reduktionsabbildung (wie in den entsprechenden Beweisen der Vorlesung), dass H_0 reduzierbar ist auf K, d.h. $H_0 \leq K$.

2. Zeigen Sie, dass die Menge $R = \{w \in \Sigma^* ; \varphi_w(0) = \perp\}$ unentscheidbar ist.
   Dabei sei φ_w diejenige (partielle) Funktion $\varphi_w : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, die von der Turingmaschine M_w berechnet wird.

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet und seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ rekursiv auflistbare Sprachen. Zeigen Sie:

1. $L_1 := ABA$ ist rekursiv auflistbar.

2. $L_2 := A \cap B$ ist rekursiv auflistbar.

<u>Hinweis:</u> Die Cantorsche Paarfunktion bzw. die dazugehörigen Projektionen c_1 und c_2 könnten hilfreich sein.

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Geben Sie jeweils ein Beispiel für die folgenden Objekte an. Falls kein solches Objekt existiert, begründen Sie dies.

1. Eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, die primitiv-rekursiv ist, aber deren Definitionsbereich (also $\{n \in \mathbb{N}_0\,;\, f(n) \neq \bot\}$) endlich ist.
2. Eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$, die total ist und für die $\{w \in \Sigma^*\,;\, \varphi_w = f\}$ entscheidbar ist.
3. Ein unentscheidbarer Wertebereich einer berechenbaren Funktion.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie im Folgenden Ihre Antworten möglichst knapp!

1. Wenn f berechenbar ist, dann ist $A_f := \{w \in \Sigma^*\,;\, f(w) \neq \bot\}$ semi-entscheidbar.
2. Für das spezielle Halteproblem $K = \{w \in \{0, 1\}^*\,;\, M_w[w]\downarrow\}$ und eine beliebige Sprache A gilt: Wenn $K \cap A$ entscheidbar ist, dann ist A endlich.
3. Für jede Turingmaschine M ist die Funktion
$$f_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } M \text{ auf allen Eingaben hält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
berechenbar.
4. Wenn f und g primitiv-rekursiv sind, und $f(x) = g(h(x))$ für alle x gilt, dann ist auch h primitiv-rekursiv.

Zusatzaufgabe 10 (wird nicht korrigiert)

Geben Sie für jede der folgenden Mengen an, ob sie entscheidbar ist oder nicht. Beweisen Sie ihre Behauptungen.

1. $L_1 = \{w \in \Sigma^*\,;\, \varphi_w(0) = 0\}$.
2. $L_2 = \{w \in \Sigma^*\,;\, \varphi_w(w) = w\}$.
3. $L_3 = \{w \in \Sigma^*\,;\, \varphi_0(0) = w\}$.

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

Warum kann man den Satz von Rice auf die folgende Menge nicht anwenden?

$$L = \{w \in \Sigma^* \,;\, \forall n \in \mathbb{N}_0 : \varphi_w(n) = \perp \text{ und } w \text{ ist ein Palindrom}\}\,.$$

Vorbereitung 2

1. Wir betrachten das Postsche Korrespondenzproblem $P = (\,(1, c1), (abc, ab)\,)$.

   Bestimmen Sie alle Lösungen von P!

2. Sei $P = (p_1, p_2)$ ein Postsches Korrespondenzproblem über einem beliebigen Alphabet Σ mit $p_i = (x_i, y_i)$ und $|\,|x_i| - |y_i|\,| = 1$ für $i = 1, 2$.

   Zeigen Sie, dass P entscheidbar ist!

Vorbereitung 3

Zeigen Sie, dass die polynomielle Reduzierbarkeit $\leq_p$ eine transitive Relation ist. Polynomielle Reduzierbarkeit bedeutet, dass die Reduktionsfunktion in polynomieller Zeit berechenbar ist.

Vorbereitung 4

Beantworten Sie kurz die folgenden Fragen:

1. Ist TIME_M für jede deterministische Turingmaschine M berechenbar?

2. PSPACE ist die Klasse all jener Probleme, die eine DTM mit „polynomiell viel Band in Abhängigkeit der Länge der Eingabe" lösen kann. Gilt $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{PSPACE}$?

Vorbereitung 5

Beweisen Sie:

1. $\mathcal{P}$ ist abgeschlossen unter Komplement.

2. Das Problem, zu entscheiden, ob ein gegebener Graph ein Dreieck enthält, ist in $\mathcal{P}$.

Tutoraufgabe 1

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Bestimmen Sie alle Lösungen des Postschen Korrespondenzproblems

$$P_1 = \{(a, aaa), (abaaa, ab), (ab, b)\}$$

Tutoraufgabe 2

1. Ist NTIME_M für jede deterministische Turingmaschine M berechenbar? Begründung!
2. Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$. Falls NTIME(f(n)) eine nichtentscheidbare Sprache enthält, dann ist f nicht berechenbar. Beweis!
3. Wir betrachten die Komplexitätsklasse $\mathcal{P}$. Dann gibt es für jede DTM M mit $L(M) \in \mathcal{P}$ ein Polynom p, so dass $\mathrm{TIME}_M(w) \leq p(|w|)$ für alle $w \in \Sigma^*$ gilt.

   Richtig oder Falsch? Begründung!
4. Ist jede in polynomieller Zeit berechenbare Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ auch polynomiell beschränkt ($\exists$ Polynom p. $\forall n.\ f(n) \leq p(n)$)? Begründung!

Tutoraufgabe 3

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Eine Sprache ist genau dann vom Typ 0, wenn sie rekursiv auflistbar ist.
2. Das folgende Problem ist entscheidbar:

   Gegeben: Eine deterministische Turingmaschine M.

   Problem: Schreibt M mit leerer Eingabe jemals ein nicht-$\Box$ Symbol auf das Band?
3. Wenn eine Turingmaschine M bei einer Eingabe w das Band nie verändert, dann sagen wir, dass M ohne Speicherung arbeitet und schreiben dafür $OS(M, w)$. Wir definieren $OS = \{(v, w)\,;\, OS(M_v, w)\}$.

   Dann ist OS entscheidbar.
4. Die folgende Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ist berechenbar:

   $$f(x) = \begin{cases} 1 : P = NP \\ 0 : \text{sonst} \end{cases}$$

   Informieren Sie sich über die Probleme P und NP.